©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Seit dem Beginne des Jahres 1885 ist eine Reihe von interessanten Untersuchungen erschienen, welche sich theils auf die Wurzeln der allgemeinen hypergeometrischen Reihe, theils auf diejenigen der im Endlichen abbrechenden und einiger zu derselben in naher Beziehung stehenden ganzen Functionen beziehen. So wurde von Herrn Stieltjes die Discriminante der Hermite'schen Function n^{ten} Grades $U_n(x)$ und von demselben und Herrn Posse die symmetrische Function $|s_{i+\varkappa}|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,r)}$, wo $s_\varkappa$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln des Jacobi'schen Polynomes n^{ten} Grades $T_{n,\alpha,\beta}(x)$ vorstellt und speciell die Discriminante desselben bestimmt, sowie eine Reihe von Sätzen über die Maxima gewisser Functionen von n reellen Veränderlichen ermittelt, in denen die Wurzeln der angeführten ganzen Functionen eine Rolle spielen. Die Discriminante der hypergeometrischen Reihe mit endlicher Gliederzahl hat auf einem anderen Wege, als die eben angeführten Mathematiker, auch Herr David Hilbert abgeleitet und ebenso wie Herr Stieltjes einige Sätze über die Natur und Vertheilung der Wurzeln dieser ganzen Function erschlossen. Analoge Sätze über eine in der Theorie der Bessel'schen Functionen auftretende ganze Function n^{ten} Grades $A_n(x)$ hat Herr Halphen veröffentlicht.

Das weitaus wichtigste von allen hieher gehörigen Resultaten ist aber das von Herrn Felix Klein am 27. August 1890 in der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften und am 16. September der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Bremen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

mitgetheilte Theorem, dass die hypergeometrische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, wo α, β, γ reelle Grössen sind, $\alpha \gtreqqless \beta$ ist und γ selbstverständlich weder Null noch eine ganze negative Zahl sein kann, in dem Intervalle 0...1

$$A = \left\{\frac{\alpha-\beta+|1-\gamma|-|\gamma-\alpha-\beta|+1}{2}\right) + \varepsilon$$

Wurzeln besitzt, wo $\{a\}$ die grösste ganze Zahl vorstellt, welche von α überschritten wird, ε für $\gamma < 1$, $\gamma-\alpha-\beta \leqq 0$ und weder $\gamma-\alpha$ noch $\gamma-\beta$ Null oder negativ ganzzahlig denjenigen der zwei Werthe 0, 1 vorstellt, für welchen

$$A \equiv \frac{1-\operatorname{sign}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{2} \pmod{2}$$

wird, für $\gamma < 1$, $\gamma-\alpha-\beta \geqq 0$ und weder α noch β Null oder negativ ganzzahlig diejenige der zwei Zahlen 0, 1, welche

$$A \equiv \frac{1-\operatorname{sign}\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{2} \pmod{2}$$

macht und endlich in allen anderen Fällen gleich 0 ist. Diesen Satz hat Herr Felix Klein[1] in dem vor Kurzem ausgegebenen vierten Hefte des 37. Bandes der „Mathematischen Annalen" mittelst einer eigenthümlichen, höchst bemerkenswerthen Methode, von welcher er mit Recht erwartet, dass sie bei der Untersuchung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch wesentliche Dienste leisten wird, bewiesen.

Die auf die Discriminante der erwähnten und einiger anderen ganzen Functionen bezüglichen Sätze sollen nun im ersten Paragraphen der vorliegenden Mittheilung in neuer Weise abgeleitet werden, während der zweite einen höchst einfachen Beweis des eleganten Klein'schen Theorems enthält.

§. 1. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)y''(x) - \left\{\frac{p}{a}+\frac{q}{b}-\frac{r}{ab}x\right\}y'(x) -$$
$$-\frac{n}{ab}\{r+n-1\}y(x) = 0\,, \quad (a,\, b \gtreqqless 0) \qquad 1)$$

[1] „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe", a. a. O.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo a, b, p, q, r reelle Zahlen sind, hat, wie man leicht findet, bei endlichen Werthen von a und b stets eine ganze Function n^{ten} Grades als particuläres Integral, ist aber wenigstens eine der Grössen a, b unendlich, so ist dies nur der Fall, wenn

$$\left|\frac{r}{ab}\right| > 0$$

ist. Differentiirt man dieselbe $\varkappa$-mal nach x, so erhält man die allgemeinere Beziehung

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)y^{(\varkappa+2)}(x)-\left\{\frac{p+\varkappa}{a}+\frac{q+\varkappa}{b}-\frac{r+2\varkappa}{ab}x\right\}y^{(\varkappa+1)}(x)-$$

$$-\frac{n-\varkappa}{ab}\{r+\varkappa+n-1\}y^{(\varkappa)}(x)=0, \qquad 2)$$

welche u. A. zeigt, dass $y(x)$ keine anderen mehrfachen Wurzeln besitzen kann, als a und b, und dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine dieser Grössen eine $\varkappa$-fache Wurzel ist, darin besteht, dass die lineare Function von x

$$\frac{p+\varkappa-1}{a}+\frac{q+\varkappa-1}{b}-\frac{r+2\varkappa-2}{ab}x$$

für dieselbe verschwindet.

Aus der Gleichung 2) folgt sofort die Relation

$$\prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda}\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{a}\right)\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{b}\right)y^{(\varkappa+2)}(x_\lambda^{(\varkappa+1)})=$$

$$=\left\{\frac{(n-\varkappa)(r+\varkappa+n-1)}{ab}\right\}^{n-\varkappa-1}\prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda}\,y^{(\varkappa)}(x_\lambda^{(\varkappa+1)}), \qquad 3)$$

wo die Grössen $x_\lambda^{(\varkappa+1)}$ $(\lambda=1, 2, \ldots, n-\varkappa-1)$ die Wurzeln der Gleichung $y^{(\varkappa+1)}(x)=0$ vorstellen. Nimmt man den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in $y(x)$ gleich 1, so ist

$$\prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda}\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{a}\right)\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{b}\right)=\frac{y^{(\varkappa+1)}(a)\,y^{(\varkappa+1)}(b)}{(ab)^{n-\varkappa-1}\,[n(n-1)\ldots(n-\varkappa)]^2}.$$

Schreibt man nun in der Gleichung 2) für $\varkappa$: $\varkappa+1$ und setzt $x=a$, beziehungsweise $=b$, so entstehen die Gleichungen

$$y^{(\varkappa+1)}(a) = \frac{ab\left\{\frac{p+\varkappa+1}{a} + \frac{q-r-\varkappa-1}{b}\right\}}{(n-\varkappa-1)(r+\varkappa+n)}\, y^{(\varkappa+2)}(a)$$

$$y^{(\varkappa+1)}(b) = \frac{ab\left\{\frac{q+\varkappa+1}{b} + \frac{p-r-\varkappa-1}{a}\right\}}{(n-\varkappa-1)(r+\varkappa+n)}\, y^{(\varkappa+2)}(b)$$

aus welchen wegen

$$y^{(n)}(a) = y^{(n)}(b) = n!$$

folgt

$$y^{(\varkappa+1)}(a) = (ab)^{n-\varkappa-1} \prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda} \frac{\frac{p+\varkappa+\lambda}{a} + \frac{q-r-\varkappa-\lambda}{b}}{r+\varkappa+\lambda+n-1}\, n(n-1) \qquad (n-\varkappa)$$

$$y^{(\varkappa+1)}(b) = (ab)^{n-\varkappa-1} \prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda} \frac{\frac{q+\varkappa+\lambda}{b} + \frac{p-r-\varkappa-\lambda}{a}}{r+\varkappa+\lambda+n-1}\, n(n-1) \qquad (n-\varkappa)$$

und demnach ist

$$\prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda} \left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{a}\right)\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{b}\right) = \prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda} \frac{\left\{\frac{p+\varkappa+\lambda}{a} + \frac{q-r-\varkappa-\lambda}{b}\right\}\left\{\frac{q+\varkappa+\lambda}{b} + \frac{p-r-\varkappa-\lambda}{a}\right\}}{(r+\varkappa+\lambda+n-1)^2}\,(ab)^{n-\varkappa-1}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Beachtet man ferner, dass die Discriminante

$$D_f = \prod_{1}^{n}{}_{\varkappa,\lambda} (x_\varkappa - x_\lambda)^2 \quad (\varkappa > \lambda)$$

der Gleichung

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (f(x_\lambda) = 0)$$

durch die Relation

$$D_f = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{c_n^n} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} f'(x_\lambda)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n}{c_n^{n-1}} \prod_{1}^{n-1}{}_{\lambda} f(x'_\lambda) \qquad (f'(x'_\lambda) = 0)$$

gegeben ist, so kann man die Formel 3) auch in folgender Weise schreiben:

$$D_{y(\varkappa)} = (ab)^{2(n-\varkappa-1)} \prod_{1}^{n-\varkappa-1}{}_{\lambda} \frac{\left\{\frac{p+\varkappa+\lambda}{a} + \frac{q-r-\varkappa-\lambda}{b}\right\}\left\{\frac{r+\varkappa+\lambda-p}{a} - \frac{q+\varkappa+\lambda}{b}\right\}(n-\varkappa)^{n-\varkappa}}{(r+\varkappa+\lambda+n-1)^2 (r+\varkappa+n-1)^{n-\varkappa-1}}.$$

Schreibt man in dieser Formel für $\varkappa$ der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots, n-2$, multiplicirt die so entstehenden Gleichungen mit einander und bedenkt, dass $D_{y(n-1)} = 1$ ist, so erhält man schliesslich die Relation

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$D_y = \frac{2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (ab)^{n(n-1)} \left(\frac{p+1}{a} + \frac{q-r-1}{b}\right)\left(\frac{p+2}{a} + \frac{q-r-2}{b}\right)^2 \ldots \left(\frac{p+n-1}{a} + \frac{q-r-n+1}{b}\right)^{n-1}}{(r+n-1)^{n-1} (r+n)^n \ldots (r+2n-3)^{2n-3} (r+2n-2)^{2n-2}} \cdot$$

$$\left(\frac{r+1-p}{a} - \frac{q+1}{b}\right)\left(\frac{r+2-p}{a} - \frac{q+2}{b}\right)^2 \quad \left(\frac{r+n-p-1}{a} - \frac{q+n-1}{b}\right)^{n-1}$$

In dieser allgemeinen Relation sind alle in der Einleitung erwähnten und eine Reihe von anderen bemerkenswerthen Discriminanten als specielle Fälle enthalten.

Setzt man nämlich zunächst

$$a = -b = 1, \qquad q-p = \alpha-\beta, \qquad r = \alpha+\beta,$$

so verwandelt sich die Differentialgleichung 1) in

$$(1-x^2)y''(x) + (\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x)\,y'(x) + n(\alpha+\beta+n-1)\,y(x) = 0,$$

so dass in diesem Falle $y(x) = T_{n,\alpha,\beta}(x)$ wird. Die Gleichung 4) liefert daher die von Herrn Stieltjes[1] angegebene und von den Herren Posse[2] und Hilbert[3] bewiesene Relation

$$D_{T_{n,\alpha,\beta}} = \frac{2^{n(n-1)} 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (\alpha+1)(\alpha+2)^2 \ldots (\alpha+n-1)^{n-1} (\beta+1)(\beta+2)^2 \ldots (\beta+n-1)^{n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)^{n-1} (\alpha+\beta+n)^n \quad (\alpha+\beta+2n-2)^{2n-2}}$$

Wird ferner

$$a = -b = \infty, \qquad \frac{r}{ab} = -2, \qquad p = q,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so geht die Gleichung 1) in

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

über und demnach ist in diesem Falle $y(x) = U_n(x)$. Aus 4) folgt also die Stieltjes'sche Relation[4]

$$D_{U_n} = 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n$$

Setzt man ferner

$$a = 1, \qquad b = \infty, \qquad \frac{q}{b} = \frac{r}{b} = 1,$$

so erhält man aus 1) die Differentialgleichung

$$(1-x)y''(x) + (x-p-1)y'(x) - ny(x) = 0,$$

von welcher, wie ich gezeigt habe,[5] die ganze Function n^{ten} Grades $T_n^{p-1}(x-1)$ ein particuläres Integral ist. Aus 4) ergibt sich daher die Formel

---

[1] „Sur les polynômes de Legendre." Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences. Paris, t. 100, p. 620—622.

[2] „Über die Functionen, welche den Legendre'schen ähnlich sind." Sammlung der Mittheilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. Jahrgang 1885, II, S. 155—169. Der Inhalt dieser in russischer Sprache erschienenen Abhandlung ist mir nur durch das Referat in dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" bekannt. — „Sur quelques applications des fractions continues algébriques." St. Pétersbourg 1886.

[3] „Über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe." Journal f. d. reine und angewandte Mathematik von Kronecker und Weierstrass, Bd. 103, S. 337—345.

[4] „Sur quelques théorèmes d'algèbre." Comptes rendus, t. 100, S. 439—440.

[5] „Über die Functionen $T_n^m(x)$." Diese Sitzungsberichte, Bd. 95, Abth. II, S. 274—290.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$D_{T_n^p} = 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (p+2)(p+3)^2 \ldots (p+n)^{n-1}$$

Ist

$$a = 1, \quad b = \infty, \quad \frac{r}{b} = -2, \quad \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = -2n-2,$$

so entsteht aus 1) die Differentialgleichung

$$(1-x)y''(x) - 2\{x-n-1\}y'(x) + 2ny(x) = 0,$$

von welcher die ganze Function $A_n(x-1)$ ein particuläres Integral ist. Die Formel 4) liefert daher den von Halphen[1] aufgestellten Ausdruck für die Discriminante dieser Function

$$D_{A_n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2n-1)(2n-3)^3(2n-5)^5 \ldots 7^{2n-7} . 5^{2n-5} \; 3^{2n-3}$$

Setzt man endlich

$$a = b = 1, \qquad r = 1-\gamma, \qquad p+q = 2-\gamma \qquad (\gamma \geqq 2n \text{ oder nicht ganzzahlig})$$

und schreibt für $x : x+1$, so ergibt sich aus 1) die specielle Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + \{(1-\gamma)x+1\}y'(x) - n(n-\gamma)y(x) = 0. \qquad 4a)$$

Ein particuläres Integral derselben ist, wie man leicht findet, die ganze Function

---

[1] „Correspondance. Extrait d'une lettre de M. Halphen à M. Rouché". Nouvelles Annales de mathématiques par M. Ch. Brisse et M. E. Rouché. Troisième série, tome septième, p. 204.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\psi_{n,\gamma}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-x)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(\gamma-n-\lambda)}, \tag{5}$$

deren Discriminante demnach nach 4) folgenden Werth hat

$$D_{\psi_{n,\gamma}} = \frac{2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n}{(\gamma-n)^{n-1}(\gamma-n-1)^n \ldots (\gamma-2n+1)^{2n-2}}.$$

Die in den obigen Zeilen ermittelten speciellen Determinanten hätten auch durch ein anderes Verfahren abgeleitet werden können. Alle bisher behandelten speciellen Functionen haben nämlich einerseits die Eigenschaft, dass zwischen drei dem Grade nach unmittelbar auf einander folgenden von ihnen eine lineare Relation besteht und sind anderseits so beschaffen, dass ihre Ableitung eine Function derselben Art ist, deren wesentliche Constanten sich von denen der vorliegenden nur um eine oder zwei Einheiten unterscheiden. Diese zwei Eigenschaften bewirken, dass die Discriminante einer solchen Function sich auf die Resultante von zwei unmittelbar aufeinander folgenden zurückführen lässt, welche mit Hilfe der ersten von ihnen auf die Resultante der zwei ersten Functionen reducirt werden kann. Es mag dieses Verfahren an den Functionen $\psi_{n,\gamma}(x)$ auseinandergesetzt werden. Zu dem Behufe sollen einige Eigenschaften dieser interessanten, bisher noch wenig beachteten Functionen abgeleitet werden. Differentiirt man die Gleichung 5) nach x, so erhält man die Formel

$$\frac{d\psi_{n,\gamma}(x)}{dx} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(-x)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda-1)\,\Pi(\gamma-n-\lambda-1)}$$

$$= -\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$D_{T_n^p} = 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (p+2)(p+3)^2 \ldots (p+n)^{n-1}$$

Ist

$$a = 1, \quad b = \infty, \quad \frac{r}{b} = -2, \quad \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = -2n-2,$$

so entsteht aus 1) die Differentialgleichung

$$(1-x)y''(x) - 2\{x-n-1\}y'(x) + 2ny(x) = 0,$$

von welcher die ganze Function $A_n(x-1)$ ein particuläres Integral ist. Die Formel 4) liefert daher den von Halphen[1] aufgestellten Ausdruck für die Discriminante dieser Function

$$D_{A_n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2n-1)(2n-3)^3(2n-5)^5 \ldots 7^{2n-7} . 5^{2n-5} \; 3^{2n-3}$$

Setzt man endlich

$$a = b = 1, \qquad r = 1-\gamma, \qquad p+q = 2-\gamma \qquad (\gamma \geqq 2n \text{ oder nicht ganzzahlig})$$

und schreibt für $x : x+1$, so ergibt sich aus 1) die specielle Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + \{(1-\gamma)x+1\}y'(x) - n(n-\gamma)y(x) = 0. \qquad 4a)$$

Ein particuläres Integral derselben ist, wie man leicht findet, die ganze Function

---

[1] „Correspondance. Extrait d'une lettre de M. Halphen à M. Rouché". Nouvelles Annales de mathématiques par M. Ch. Brisse et M. E. Rouché. Troisième série, tome septième, p. 204.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\psi_{n,\gamma}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-x)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(\gamma-n-\lambda)}, \tag{5}$$

deren Discriminante demnach nach 4) folgenden Werth hat

$$D_{\psi_{n,\gamma}} = \frac{2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n}{(\gamma-n)^{n-1}(\gamma-n-1)^n \ldots (\gamma-2n+1)^{2n-2}}.$$

Die in den obigen Zeilen ermittelten speciellen Determinanten hätten auch durch ein anderes Verfahren abgeleitet werden können. Alle bisher behandelten speciellen Functionen haben nämlich einerseits die Eigenschaft, dass zwischen drei dem Grade nach unmittelbar auf einander folgenden von ihnen eine lineare Relation besteht und sind anderseits so beschaffen, dass ihre Ableitung eine Function derselben Art ist, deren wesentliche Constanten sich von denen der vorliegenden nur um eine oder zwei Einheiten unterscheiden. Diese zwei Eigenschaften bewirken, dass die Discriminante einer solchen Function sich auf die Resultante von zwei unmittelbar aufeinander folgenden zurückführen lässt, welche mit Hilfe der ersten von ihnen auf die Resultante der zwei ersten Functionen reducirt werden kann. Es mag dieses Verfahren an den Functionen $\psi_{n,\gamma}(x)$ auseinandergesetzt werden. Zu dem Behufe sollen einige Eigenschaften dieser interessanten, bisher noch wenig beachteten Functionen abgeleitet werden. Differentiirt man die Gleichung 5) nach x, so erhält man die Formel

$$\frac{d\psi_{n,\gamma}(x)}{dx} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(-x)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda-1)\,\Pi(\gamma-n-\lambda-1)}$$

$$= -\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und demnach ist allgemein

$$\frac{d^r \psi_{n,\gamma}(x)}{dx^r} = (-1)^r \psi_{n-r,\gamma-2r}(x) \quad (n \geqq r \geqq 0)$$

Nach 5) ist ferner, wie man leicht zeigt:

$$\psi_{n,\gamma}(x) + \frac{\gamma-2n+2}{n}\left\{(\gamma-2n+1)x - \frac{\gamma+1}{\gamma-2n+3}\right\}\psi_{n-1,\gamma}(x) = \frac{\{3n\gamma-n^2+5n-(\gamma+1)(\gamma+2)\}\psi_{n-2,\gamma}(x)}{n(\gamma-2n+3)} \qquad 6)$$

und demnach sind diese Functionen die Näherungsnenner einer regulären Kettenbruchentwicklung. Verbindet man die durch Differentiation von 6) sich ergebende Relation

$$\psi_{n-1,\gamma-2}(x) + \frac{\gamma-2n+2}{n}\left\{(\gamma-2n+1)x - \frac{\gamma+1}{\gamma-2n+3}\right\}\psi_{n-2,\gamma-2}(x) - \frac{3n\gamma-n^2+5n-(\gamma+1)(\gamma+2)}{n(\gamma-2n+3)}\psi_{n-3,\gamma-2}(x) =$$
$$= \frac{(\gamma-2n+1)(\gamma-2n+2)}{n}\psi_{n-1,\gamma}(x)$$

mit derjenigen, welche entsteht, wenn in Gleichung 6) für $n : n-1$ und für $\gamma : \gamma-2$ geschrieben wird, so erhält man die Gleichung

$$(n-1)\psi_{n-1,\gamma}(x) = -\left\{x - \frac{1}{\gamma-2n+3}\right\}\psi_{n-2,\gamma-2}(x) + \frac{1}{\gamma-2n+3}\psi_{n-3,\gamma-2}(x) \qquad 7)$$

oder

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(x-\frac{1}{\gamma-2n+3}\right)\frac{d\psi_{n-1,\gamma}(x)}{dx}=\frac{1}{\gamma-2n+3}\,\frac{d\psi_{n-2,\gamma}(x)}{dx}+(n-1)\psi_{n-1,\gamma}(x)\,, \qquad 8)$$

welche Gleichung ebenso, wie die früher aufgestellte Discriminante lehrt, dass die Gleichung $\psi_{n,\gamma}(x)=0$ nur verschiedene Wurzeln besitzt.

Besässe nämlich diese Gleichung eine mehrfache Wurzel, so müsste für dieselbe auch $\frac{d\psi_{n,\gamma}(x)}{dx}$, also $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$, verschwinden, was nach 7) auch das Nullwerden von $\psi_{n-2,\gamma-2}(x)$ zur Folge hätte. Ein gleichzeitiges Verschwinden von $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$ und $\psi_{n-2,\gamma-2}(x)$ würde aber nach 6) bewirken, dass für denselben Werth von x sämmtliche Functionen $\psi_{n,\gamma-2}(x)$, $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$, ..., $\psi_{1,\gamma-2}(x)$, $\psi_{0,\gamma}(x)$ gleich Null werden, was unmöglich ist, da die letzte von ihnen eine von Null verschiedene Constante ist.

Schreibt man in der Gleichung 8) für $n:n+1$, und ersetzt x der Reihe nach durch die verschiedenen Wurzeln x'_λ ($\lambda=1, 2, \ldots, n-1$) der Gleichung $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)=0$, so erhält man durch Multiplication der so entstehenden Gleichungen die Relation

$$D_{\psi_{n,\gamma}}=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,[\Pi(n)\,\Pi(\gamma-2n)]^{n-1}}{n^{2n-1}\,[(\gamma-2n+1)\,\Pi(n-2)\,\Pi(\gamma-2n+2)]^{n-1}}\,R\,\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x),\ \psi_{n-2,\gamma-2}(x)\}\,, \qquad 9)$$

wo

$$R\,\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x),\ \psi_{n-2,\gamma-2}(x)\}=\prod_{\varkappa,\lambda}(x'_\lambda-x''_\varkappa) \qquad \{\psi_{n-2,\gamma-2}(x''_\varkappa)=0;\ \varkappa=1, 2, \ldots, n-2;\ \lambda=1, 2, \ldots, n-1\}$$

ist. Schreibt man ferner in 6) für $n:n-1$, für $\gamma:\gamma-2$ und setzt sodann $x=x''_\varkappa$ ($\varkappa=1, 2, \ldots, n-2$), so liefert die Multiplication der dadurch sich ergebenden Relationen die Formel

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$R\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x),\ \psi_{n-2,\gamma-2}(x)\} = \left[\frac{\{3(n-1)(\gamma-2)-(n-1)^2+5(n-1)-\gamma(\gamma-1)}{(n-1)(\gamma-2n+3)}\right]^{n-2} R\{\psi_{n-2,\gamma-2}(x),\ \psi_{n-3,\gamma-2}(x)\}$$

welche im Vereine mit 9) zur Bestimmung von $D_{\psi_{n,\gamma}}$ ausreicht.

Ich will nur noch darauf hinweisen, dass man die Differentialgleichung 4a) in der Form

$$\left[e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma+1} \psi_{n-1,\gamma-2}(x)\right]' = n(\gamma-n)\, e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1} \psi_{n,\gamma}(x)$$

schreiben kann, aus welcher man unmittelbar das Bestehen der allgemeineren Relation

$$\left[e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma+2r-1} \psi_{n-r,\gamma-2r}(x)\right]^{(r)} = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\gamma-n)}{\Pi(n-r)\,\Pi(\gamma-n-r)}\, e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1} \psi_{n,\gamma}(x)$$

erschliesst, die wegen der Gleichung

$$\psi_{0,\gamma-2n}(x) = \frac{1}{\Pi(\gamma-2n)}$$

zu der folgenden Darstellung der Function $\psi_{n,\gamma}(x)$ führt:

$$\psi_{n,\gamma}(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} x^{\gamma+1}}{\Pi(n)\,\Pi(\gamma-n)} \left[e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma+2n-1}\right]^{(n)}$$

Dieselbe zeigt, dass für jede, eine n-malige Differentiation zulassende Function $\varphi(x)$, welche den Bedingungen

$$\lim._{x=0} e^{-\frac{1}{x}} x^{n-\gamma-1} \varphi(x) = 0; \quad \lim._{x=\infty} \varphi(x) x^{n-\gamma-1} = 0$$

genügt, die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1} \varphi(x) \psi_{n,\gamma}(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{\Pi(n)\Pi(\gamma-n)} \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x)\, e^{-\frac{1}{x}} x^{2n-\gamma-1}\, dx$$

besteht, von deren speciellen Fällen die folgenden hier Erwähnung finden mögen

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{m-\gamma-1} \psi_{n,\gamma}(x)\, dx = \frac{(-1)^n \Pi(m)\Pi(\gamma-m-n-1)}{\Pi(n)\Pi(m-n)\Pi(\gamma-n)} \qquad (\gamma > m+n;\ m \geqq n)$$

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{x}+\alpha^2 x\right)} \psi_{n,2n-\frac{3}{2}}(x) \frac{dx}{x^{2n-\frac{1}{2}}} = \frac{(1+2\alpha)\alpha^{2n} e^{-2\alpha}\sqrt{\pi}}{2\Pi(n)\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}-rx\cos\varphi} \cos(rx\sin\varphi)\psi_{n,2n-\frac{1}{2}}(x)\, dx}{x^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{r^{n-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\pi}}{\Pi(n)\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sin\left\{\frac{\varphi}{2} - n\varphi + 2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right\} \qquad \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}-rx\cos\varphi} \sin(rx\sin\varphi)\psi_{n,2n-\frac{1}{2}}(x)\, dx}{x^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{r^{n-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\pi}}{\Pi(n)\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \cos\left\{\frac{\varphi}{2} - n\varphi + 2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right\} \qquad \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-\gamma-1} \psi_{n,\gamma}(x) \psi_{m,\gamma}(x)\, dx = 0 \qquad (m \gtrless n;\ \gamma > m+n)$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1} (\psi_{n,\gamma}(x))^2\, dx = \frac{1}{(\gamma-2n)\,\Pi(n)\,\Pi(\gamma-n)} \qquad (\gamma > 2n),$$

deren letzte zwei vor Kurzem Herr J. Rajewski[1] in den Schriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften aufgestellt hat.

Zum Schlusse dieses Paragraphes will ich noch den folgenden allgemeinen Satz angeben, in welchem die in der Einleitung erwähnten Theoreme der Herren Stieltjes und Posse über die Extreme gewisser Functionen von n reellen Veränderlichen als specielle Fälle enthalten sind, und welcher eine interessante Eigenschaft der Näherungsnenner von gewissen Kettenbruchentwicklungen ausspricht.

Ist $f(x)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von x mit den verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $g(x)$ eine ganze Function vom Grade $m-1$, und lassen sich m Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ so bestimmen, dass in der Kettenbruchentwicklung der Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m-1} \alpha_\lambda \int_{x_\lambda}^{x_{\lambda+1}} \frac{(z-x_1)^{\frac{g(x_1)}{f'(x_1)}} (z-x_2)^{\frac{g(x_2)}{f'(x_2)}} \ldots (z-x_m)^{\frac{g(x_m)}{f'(x_m)}}\, dz}{(x-z) f(z)}$$

---

[1] „O pewnych całkach określonych." Der Inhalt dieser Arbeit ist mir nur durch den kurzen Auszug im „Anzeiger der k. Akademie der Wissenschaften in Krakau" (Februar 1890) bekannt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die n ersten Theilnenner linear mit positivem Coëfficienten von x, der $(n+1)^{\text{te}}$ aber vom Grade $m-1$ wird und dass der n^{te} Näherungsnenner $\psi_n(x)$ dieser Kettenbruchentwicklung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, so wird die Function

$$\chi(x'_1)\,\chi(x'_2) \qquad \chi(x'_n) \prod_{\varkappa,\lambda} (x'_\lambda - x'_\varkappa)^2 \quad (\lambda > \varkappa)$$

der reellen Veränderlichen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, wo

$$\chi(x) = e^{\int \frac{g(x)}{f(x)} dx}$$

ist, ein Extremum, wenn für $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ die Wurzeln der Gleichung $\psi_n(x) = 0$ gesetzt werden.

Von den bisher nicht veröffentlichten speciellen Fällen dieses Satzes mögen die folgenden drei hervorgehoben werden.

Ist c eine von den Wurzeln des n^{ten} Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_0^\alpha \frac{dz}{(x-z)\sqrt{z(z-\alpha)(z-\beta)}} \qquad (0 < \alpha < \beta)$$

verschiedene reelle Constante, so wird die Function der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{\sqrt{x_1(x_1-\alpha)(x_1-\beta)\,x_2(x_2-\alpha)(x_2-\beta)\ldots x_n(x_n-\alpha)(x_n-\beta)}}{(x_1-c)(x_2-c)\qquad(x_n-c)} \prod_{\lambda,\varkappa} (x_\lambda - x_\varkappa)^2 \qquad (\lambda < \varkappa)$$

ein Maximum, wenn für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln dieses Näherungsnenners gesetzt werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Function

$$e^{-(x_1+x_2+\dots+x_n)}(x_1x_2\dots x_n)^{m+1}\prod_{\lambda,\varkappa}(x_\lambda-x_\varkappa)^2 \qquad (\lambda>\varkappa)$$

der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ wird ein Maximum, wenn für $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $T_n^m(x)=0$ gesetzt werden.

Den speciellen Fall $m=0$ dieses Satzes hat Herr Posse in den „Charkower Mittheilungen" als Grenzfall eines Satzes des Herrn Stieltjes abgeleitet.

Die Function

$$e^{-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)}(x_1x_2\dots x_n)^{1-\gamma}\prod_{\varkappa,\lambda}(x_\lambda-x_\varkappa)^2 \qquad (\lambda>\varkappa;\ \gamma\geqq 2n)$$

der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ wird ein Maximum, wenn für $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $\psi_{n,\gamma}(x)=0$ gesetzt werden.

§. 2. Es soll nun eine einfache Ableitung des im Anfange erwähnten Klein'schen Satzes angegeben werden. Da

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x) \qquad 1)$$

ist und aus der Relation

$$\gamma-\alpha-\beta\gtrless 0$$

die Beziehung

$$\gamma-(\gamma-\alpha)-(\gamma-\beta)\lesseqgtr 0$$

folgt, so lässt sich jeder der beiden Fälle $\gamma-\alpha-\beta\geqq 0$, $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ auf den anderen zurückführen, und es genügt demnach, nur einen von ihnen zu betrachten.

Ist

$$\gamma\geqq 1,\quad \gamma-\alpha-\beta<0,$$

so muss mindestens eine der zwei Zahlen α, β, von denen α nicht kleiner als β sein soll, positiv sein; es können aber auch, falls $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ in dem Intervalle $0\dots 1$ eine Wurzel besitzt, nicht beide positiv sein, weil sonst die eben genannte hypergeometrische

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Reihe für keinen positiven Werth von x verschwinden könnte. Man hat demnach in diesem Falle die Gleichung

$$\text{sign.}(\alpha\beta) = -1.$$

Ist $F(x)$ eine innerhalb der Grenzen x_1, x_2 eindeutige, endliche, differentiirbare Function der reellen Veränderlichen x, deren erste Ableitung in dem genannten Intervalle an den Nullstellen von $F(x)$ nicht verschwindet, so ist bekanntlich

$$\sum_{x_1}^{x_2}{}_{\xi} \text{sign.}(F'(\xi)) = -\frac{1}{2}\text{sign.}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\text{sign.}(F(x_2)),$$

wo die Summation über alle dem genannten Intervalle angehörigen Nullstellen von $F(x)$ zu erstrecken ist. Aus diesem Satze folgt bekanntlich, wenn $F_1(x)$ eine zweimalige Differentiation zulässt und weder $F_1(x)$ noch $F_1'(x)$ in dem genannten Intervalle eine mehrfache Wurzel besitzt, die Gleichung

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{A}}(F_1(x)) = -\sum_{x_1}^{x_2}{}'_{\xi} \text{sign.}\{F_1(\xi')F_1''(\xi')\} -$$
$$-\frac{1}{2}\text{sign}\{F_1(x_1)F_1'(x_1)\} + \frac{1}{2}\text{sign}\{F_1(x_2)F_1'(x_2)\}, \qquad 2)$$

wo die Summation sich auf alle im Intervalle $x_1 \ldots x_2$ liegenden Wurzeln von $F_1'(x)$ bezieht und $\overset{x_2}{\underset{x_1}{A}}\{F_1(x)\}$ die Anzahl der in demselben befindlichen Wurzeln von $F_1(x)$ vorstellt.

Nimmt man nun

$$F_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

wo α, β, γ die eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllen mögen, so folgt aus der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$x(1-x)y''(x) + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'(x) - \alpha\beta y(x) = 0 \qquad 3)$$

zunächst, dass weder $F_1(x)$ noch eine seiner Ableitungen zwischen 0 und 1 eine mehrfache Wurzel besitzen kann, und man hat ferner

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\text{sign}.\{F_1(0)F_1'(0)\} = \text{sign}.(\alpha\beta\gamma) = -1$$
$$\text{sign}.\{F_1(1)F_1'(1)\} = +1.$$

Beachtet man noch, dass

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

ist, so erhält man aus 2) die specielle Relation

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha, \beta, \gamma, x)\} = \overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)\} + 1,$$

aus der sofort folgt

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha, \beta, \gamma, x)\} = \overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+\rho, \beta+\rho, \gamma+\rho, x)\} + \rho \quad (\beta+\rho \leqq 0).$$

Es ist demnach

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha, \beta, \gamma, x)\} + \beta - 1 < 0, \quad \overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha, \beta, \gamma, x)\} + \beta \geqq 0$$

oder also

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha, \beta, \gamma, x)\} = \{1-\beta\} \qquad (\gamma \geqq 1,\ \gamma-\alpha-\beta \leqq 0)$$

aus welcher Relation nach 1) die weitere folgt

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha, \beta, \gamma, x)\} = \{\alpha-\gamma+1\} \qquad (\gamma \geqq 1,\ \gamma-\alpha-\beta \geqq 0).$$

Hiebei ist die in der Einleitung angegebene Bedeutung von $\{a\}$ dahin zu ergänzen, dass diese Grösse für ein negatives a den Werth Null haben soll.

Für den Fall $\gamma < 1$ soll das zweite particuläre Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung 3)

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) =$$
$$= x^{1-\gamma} F(\beta+1-\gamma, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$$

der Betrachtung zu Grunde gelegt werden. Da diese Function in diesem Falle für $x = 0$ verschwindet, so ist nach dem Sturm'schen Satze über die Anzahl der einem bestimmten Intervalle angehörigen Nullstellen eines particulären Integrales einer linearen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Differentialgleichung zweiter Ordnung die Anzahl ihrer Wurzeln innerhalb der Grenzen 0...1 entweder gleich der Anzahl der innerhalb derselben Grenzen befindlichen Nullstellen von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ oder um eine Einheit kleiner.

Ist nun $\gamma-\alpha-\beta<0$ und demnach $\alpha+\beta+1-\gamma>0$, so muss wieder $\alpha>0$ und $\beta<0$ sein; denn positiv können beide Zahlen nicht sein, wenn $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$ im Intervalle 0...1 verschwinden soll, wären aber beide negativ, so hätte man

$$\alpha+1-\gamma>0, \qquad \beta+1-\gamma>0$$

was nach 4) ebenfalls das Nichtverschwinden der eben genannten Reihe innerhalb der erwähnten Grenzen zur Folge hätte.

Aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x(1-x)\,y''(x)+\{\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\,y'(x)-\alpha\beta y(x)=0,$$

welcher $F_1(x)=F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, x)$ genügt, folgt nun unter den gemachten Voraussetzungen

$$\text{sign}\,.\,\{F_1(0)\,F_1'(0)\}=\text{sign}\,.\,\{\alpha\beta(\alpha+\beta+1-\gamma)\}=-1$$
$$\text{sign}\,.\,\{F_1(1)\,F_1'(1)\}=\text{sign}\,.\,\{-\alpha\beta\gamma\}=\text{sign}\,.(\gamma)$$

und demnach hat man nach 2) die Relation

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)\}=$$
$$=\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+2-\gamma, 1-x)\}+\frac{1}{2}\{1+\text{sign}.(\gamma)\}.$$

Ist also σ die kleinste ganze Zahl, für welche

$$\text{sign}\,.(\gamma+\sigma)=+1 \tag{5}$$

ist, so hat man die Beziehung

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)\}=$$
$$=\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+\tau, \beta+\tau, \alpha+\beta+\tau+1-\gamma, 1-x)\}+\tau-\sigma+1$$
$$(\tau\geqq\sigma,\ \beta+\tau\leqq 0)$$

und daher besteht die Ungleichung

$$\sigma-\beta<\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)\}\leqq 1-\sigma-\beta$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

welche in Verbindung mit 5) die Gleichung

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}=\{\gamma-\beta\}\quad(\gamma<1;\ \gamma-\alpha-\beta<0)$$

liefert, aus der nach 4) die weitere Formel

$$\overset{1}{\underset{1}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}=\{\alpha\}\quad(\gamma<1;\ \gamma-\alpha-\beta>0)$$

folgt.

Hiermit ist das Klein'sche Theorem vollständig bewiesen, wenn man noch berücksichtigt, dass die Anzahl der Wurzeln der Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ zwischen 0 und 1 ungerade oder gerade ist, je nachdem sign. $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ den Werth -1 oder $+1$ hat.

Mit Hilfe des eben benützten Verfahrens kann man auch für jede der im vorigen Paragraphe behandelten speciellen ganzen Functionen leicht die Anzahl und Vertheilung der reellen Wurzeln bestimmen. Es mag hier nur auf die auf diesem Wege sich ergebenden Gleichungen

$$\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{\psi_{n,\gamma}(x)\}+\operatorname{sign}.(n-\gamma)\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x)\}=-\left\{\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sign}.(n-\gamma)}{2}\right\};$$

$$\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{\psi_{n,\gamma}(x)\}+\operatorname{sign}.(n-\gamma)\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x)\}=\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sign}.(n-\gamma)}{2}$$

$$\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{A_n(x)\}+\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{A'_n(x)\}=1;\quad \overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{A_n(x)\}=\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{A'_n(x)\}$$

hingewiesen werden, welche folgende Theoreme liefern:

Die ganze Function $\psi_{n,\gamma}(x)$ hat für $\gamma>n$ n reelle ungleiche negative Wurzeln, während sie für $\gamma<n$ keine negative und $\frac{1-(-1)^n}{2}$ positive Wurzeln besitzt.

Die ganze Function $A_n(x)$ hat $\frac{1-(-1)^n}{2}$ positive und keine negative Wurzel.

Die Natur der Wurzeln der zuletzt genannten Function hat schon Herr Halphen a. a. O. angegeben.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. 225-244