©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at


# Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins

(II. Mittheilung)[1]

von

Emil Weyr,
w. M. k. Akad.

1. Unter den Flächen eines Büschels $n$ter Ordnung gibt es $4(n-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkte (Knoten). Wenn die gemeinschaftliche Schnittcurve der Flächen (die Grundcurve des Büschels) einen Doppelpunkt besitzt, so vertritt er zwei von jenen $4(n-1)^3$ Knotenpunkten. Die sämmtlichen durch $R_6$ gehenden $F_3$ bilden ein Büschel, dessen Grundcurve aus $R_6$ und den drei Quadrisecanten $Q_1 Q_2 Q_3$ besteht. Jeder der vier Schnittpunkte $a_{i\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$) von $R_6$ mit $Q_i$ zählt somit für zwei von den 32 Knotenpunkten, welche das $F_3$-Büschel enthalten muss. Jeder dieser zwölf Punkte $a_{i\varkappa}$ ist Doppelpunkt für eine durch $R_6$ hindurchgehende cubische Fläche. Ausser diesen zwölf $F_3$ mit Knotenpunkten auf den $Q$-Geraden (vergl. I. Mittheilung, Art. 18), von denen jede doppelt zu zählen ist, werden somit noch acht Flächen $F_3$ existiren, welche Knotenpunkte besitzen und $R_6$ enthalten.

2. Von diesen acht Flächen können wir die Entstehung von vier in folgender Weise angeben.

Das durch die drei $Q$-Geraden bestimmte Hyperboloid besitzt mit jeder $F_3$ des Büschels die drei $N$-Geraden gemeinschaftlich; da nun die $F_3$ durch eine der $N$-Geraden, welche (alle $Q$ schneidend) beliebig gewählt werden kann, eindeutig bestimmt erscheint, so bilden die $N$-Tripel, welche auf den einzelnen $F_3$ des Büschels

[1] Siehe diese Berichte, Bd. XCIX, S. 932.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

liegen, eine (rationale) cubische Involution auf jenem Hyperboloide. Diese Involution wird vier Doppelelemente besitzen. D. h. es gibt vier $F_3$ des Büschels (jenen vier Doppelelementen entsprechend), von denen jede zwei unendlich nahe (zu einander windschiefe) Gerade enthält. Eine solche Fläche besitzt jedoch einen Knotenpunkt, welcher auf den vereinigten zwei Geraden gelegen ist.

3. Die sämmtlichen in dem Büschel der $F_3$ auftretenden Knotenpunkte kann man in zwei Classen eintheilen. In solche, welche auf dem Hyperboloide $H$ liegen, welches durch die drei Quadrisecanten $Q$ bestimmt ist und in solche, welche dem $H$ nicht angehören. Die auf $H$ liegenden Knotenpunkte sind wieder zweierlei Art; solche, welche auf einer der Geraden $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ liegen und solche, welche nicht Punkte dieser Geraden sind. Wenn der Knotenpunkt $\varkappa$ einer durch $R_6$ gehenden $F_3$ der Curve $(R_6\, Q)$ angehört, so muss er ein Doppelpunkt der Curve sein, weil diese Curve der Schnitt jener den Knotenpunkt $\varkappa$ besitzenden $F_3$ mit irgend einer anderen Fläche des Büschels ist. Solcher Knotenpunkte $\varkappa$ gibt es also nur 12; es sind die Schnittpunkte von $R_6$ mit den drei Quadrisecanten $Q$, und zwar zählt jeder doppelt.

Es sei nun $F_3$ jene durch $R_6$ gehende cubische Fläche, welche einen der zwölf Punkte, in denen $R_6$ von den drei Quadrisecanten getroffen wird, zum Knotenpunkte hat; derselbe sei etwa auf $Q_1$ gelegen, er heisse $\varkappa$, während $a$, $b$, $c$ die drei übrigen Schnittpunkte von $R_6$ mit $Q_1$ sein mögen. Da $R_6$ aus $\varkappa$ projicirt einen Kegel fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins liefert, welcher $Q_1$ zur dreifachen Erzeugenden hat, so muss er noch zwei Doppelerzeugende besitzen. Es gehen also durch $\varkappa$ zwei Gerade, welche $R_6$ ausser in $\varkappa$ noch zweimal treffen; es seien $a'b'$, respective $a''b''$, diese Treffpunkte. Die Geraden $\varkappa abc$, $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ gehören $F_3$ an, weil jede mit $F_3$ mehr als drei Punkte gemeinsam hat.

Wenn eine cubische Fläche einen Knotenpunkt $\varkappa$ erhält, so schneiden sich in demselben sechs der Fläche angehörige gerade Linien, von denen jede zwei windschiefe von den 27 Geraden der Fläche absorbirt,[1] so dass noch weitere 15 Gerade auf einer

[1] Siehe Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig 1867, S 351.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at


solchen Fläche auftreten. Von den sechs durch $\varkappa$ gehenden Geraden von $F_3$ haben wir bereits drei. Die Geraden $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ sind zwei Trisecanten, welche die Trisecante $abc$ in einem von $a$, $b$ und $c$ verschiedenen Punkte (in $\varkappa$) schneiden. Wenn wir also die Trisecante $abc$ mit $T_1$ bezeichnen, so werden $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ mit $t_2$, $t_3$ zu bezeichnen sein (siehe I. Mittheilung, Art. 17). Die Quadrisecante $Q_1$ erscheint so vereinigt mit der zu ihr windschiefen Trisecante $T_1$.

Die Ebene $(T_1 t_2)$ enthält die Nichtsecante $N_3$, und die Ebene $(T_1 t_3)$ enthält die Nichtsecante $N_2$. Die durch $\varkappa$ zu $Q_2$ und $Q_3$ gelegte Transversale gehört $F_3$ an, weil sie mit der Fläche vier Punkte gemein hat, und da sie auch eine Erzeugende des Hyperboloides $H$ ist, so ist es die dritte Nichtsecante $N_1$. Die Ebene $N_1 Q_2$ schneidet $R_6$ in einem Punkte, welcher, mit $\varkappa$ verbunden, eine der $F_3$ angehörige (weil mit $F_3$ vier Punkte gemein habende) Gerade liefert; dasselbe gilt von der Ebene $N_1 Q_3$. Die erste von diesen beiden Geraden verbindet $\varkappa$ mit einem zweiten Curvenpunkte, ist also eine Bisecante, und zwar jene, welche $N_1$ und $Q_2$ schneidet, und das ist $B_{21}$ (siehe die Tabelle auf S. 16 und 17 der I. Mittheilung); aus demselben Grunde ist die andere dieser beiden Geraden $B_{31}$.

Nun haben wir alle sechs durch $\varkappa$ gehenden Geraden der cubischen Fläche $F_3$: $Q_1 \equiv T$, $t_2$, $t_3$, $N_1$, $B_{21}$, $B_{31}$. Die übrigen 15 von ihnen und von einander verschiedenen Geraden von $F_3$ liegen in den 15 Ebenen, welche jene sechs Gerade paarweise verbinden.

In der Ebene $(T_1 t_2)$ liegt $N_3$; in der Ebene $(T_1 t_3)$ liegt $N_2$. In der Ebene $(T_1 B_{21})$ liegt $E_2$, in $(T_1 B_{31})$ liegt $E_3$. In $(Q_1 N_1)$ liegt $B_{11}$, und da $Q_1 \equiv T_1$, so ist $N_1$ auch die dritte in der Ebene $(T_1 B_{11})$ gelegene Gerade; die in $(T_1 B_{11})$ liegende dritte Gerade von $F_3$ ist aber $E_1$ so dass also $N_1 \equiv E_1$. Die Gerade $B_{21}$ erscheint somit als dritte Gerade in der Ebene $(E_1 Q_2)$; dies ist jedoch nach dem zu Grunde liegenden Schema auf S. 16 und 17 der I. Mittheilung die Gerade $e_3$, so dass also $B_{21} \equiv e_3$. Aus ganz analogen Gründen ist $B_{31} \equiv e_2$.

In der Ebene $(t_2 t_3)$ muss eine einpunktige Secante von $R_6$ liegen, welche zugleich Gerade der $F_3$ ist; da jede einpunktige Secante zwei $Q$-Gerade schneiden muss, die in Rede stehende jedoch $Q_1$ offenbar nicht schneiden kann, so muss sie $Q_2$ und $Q_3$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schneiden, und dies ist dem Schema gemäss entweder $E_1$ oder $e_1$. Nun muss aber diese Gerade, weil in der Ebene $(t_2 t_3)$ liegend, die Geraden $t_2$ und $t_3$ schneiden, folglich ist es $e_1$.

Es liegt also in der Ebene $(t_2 t_3)$ die Gerade $e_1$.

In der Ebene $(t_2 N_1)$ muss eine Trisecante liegen, und zwar nach dem Schema offenbar $T_3$; ebenso liegt in der Ebene $(t_3 N_1)$ die Trisecante $T_2$.

In der Ebene $(B_{21} B_{31})$ muss eine Trisecante liegen; nun werden $B_{21}$ und $B_{31}$ gleichzeitig nur von den Trisecanten $t_1$ und $T_1$ geschnitten, da aber $T_1$ in der Ebene $(B_{21} B_{31})$ nicht liegen kann, so liegt in der Ebene $(B_{21} B_{31})$ die Trisecante $t_1$.

In $(B_{21} N_1)$ liegt $Q_2$, in $(B_{31} N_1)$ liegt $Q_3$.

In der Ebene $(t_2 B_{31})$, welche identisch ist mit $(t_2 e_2)$, liegt $B_{22}$.

In der Ebene $(t_2 B_{21}) \equiv (t_2 e_3)$ liegt $B_{32}$.

In $(t_3 B_{31}) \equiv (t_3 e_2)$ liegt $B_{23}$ und in $(t_3 B_{21}) \equiv (t_3 e_3)$ liegt $B_{33}$.

Nun haben wir alle 15 Gerade der Fläche $F_3$, von denen keine durch $\varkappa$ hindurchgeht; die übrigen 12 Geraden von $F_3$ sind paarweise vereinigt und gehen durch den Knotenpunkt $\varkappa$, und zwar sind vereinigt: $N_1$ mit $E_1$, $e_2$ mit $B_{31}$, $e_3$ mit $R_{21}$, $Q_1$ mit $T_1$. Ferner ist vereinigt $t_2$ mit $B_{13}$ und $t_3$ mit $B_{12}$; denn es ist $t_2$ die dritte Gerade in der Ebene $(B_{22} B_{31})$ und daher identisch mit $B_{13}$, und da $t_3$ die dritte Gerade in $(B_{33} B_{21})$ ist, so muss sie nach dem Schema mit $B_{12}$ identisch sein.

4. Wenn der Knotenpunkt $\varkappa'$ einer durch $R_6$ gehenden $F_3$ wohl auf dem durch die drei Quadrisecanten $Q_1 Q_2 Q_3$ bestimmten Hyperboloide $H$ liegt, aber keiner dieser Quadrisecanten angehört, so wird die durch $\varkappa'$ gehende, die drei $Q$ schneidende Erzeugende von $H$ eine Gerade von $F_3$ sein, und zwar eine $N$-Gerade; die anderen zwei $N$-Geraden können nicht beide von der durch $\varkappa'$ gehenden verschieden sein. Denn wenn dies der Fall wäre, so hätte die durch $\varkappa'$ gehende, mit den $Q$ zu demselben Systeme gehörende Erzeugende von $H$ mit $F_3$ vier Punkte gemeinschaftlich, würde also ganz der $F_3$ angehören, so dass $H$ mit $F_3$ vier Erzeugende eines Systems gemeinsam hätte, was nicht möglich ist, weil sonst $F_3$ zerfallen müsste in $H$ und eine Ebene. Von den drei $N$-Geraden, welche $H$ mit $F_3$ gemeinsam hat, fallen folglich zwei zusammen in jener, die durch den Knotenpunkt $\varkappa'$ geht; es liegt

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

also $\varkappa'$ auf einer Doppelerzeugenden jener cubischen Erzeugenden-involution, welche das $F$-Büschel auf $H$ bestimmt.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Doppelerzeugende jener cubischen Involution zu einem auf ihr gelegenen Knotenpunkte $\varkappa'$ Veranlassung gibt, so dass den vier Doppelelementen der cubischen Involution entsprechend vier durch $R_6$ gehende $F_3$ mit Knotenpunkten $\varkappa'$ auftreten werden.

Um nämlich die beiden Trisecanten $t_2 t_3$ von $R_6$ zu finden, welche eine gegebene Trisecante $T_1$ schneiden, hat man (I. Mittheilung, Art. 8) durch $T_1$ an $H$ die beiden Tangentialebenen zu legen; jede von ihnen enthält eine der beiden Trisecanten. Diese beiden Tangentialebenen erhält man, wenn $H$ mit $T_1$ in den Punkten $a$, $b$ zum Durchschnitte gebracht wird, und wenn man durch $a$, $b$ die Erzeugenden $N_2$, $N_3$ von $H$ legt, welche die $Q$ schneiden, so sind die Ebenen $(T_1 N_2)$, $(T_1 N_3)$ die gesuchten. Zugleich sind $N_2$, $N_3$ zwei von den drei $N$-Geraden, welche der durch $R_6$ und $T_1$ bestimmten $F_3$ angehören. Fallen $N_2 N_3$ zusammen, ein Doppelelement der mehrerwähnten cubischen Involution bildend, so ist $T_1$ Tangente von $H$ in $a \equiv b$, und weil die beiden Ebenen $(T_1 N_2)$, $(T_1 N_3)$ zusammenfallen, so werden auch die beiden Trisecanten $t_2 t_3$, welche $T_1$ schneiden, unendlich nahe zu einander rücken. Ist $N_1$ die dritte, das Doppelelement $N_2 N_3$ zu einem Tripel der cubischen Involution ergänzende Erzeugende von $H$, so wird $t_2$ von $N_1$ und $N_3$ (von letzterer etwa in $m$), und $t_3$ wird von $N_1$ und $N_2$ (von letzterer etwa in $n$) geschnitten. Die durch $T_1$ und $R_6$ gehende $F_3$ enthält auch $t_2 t_3$ $N_1 N_2 N_3$ und wird ausserdem noch die drei Trisecanten $T_2 T_3 t_1$ enthalten. Da sowohl $t_2$, $t_3$ unendlich nahe sind, als auch $N_2$, $N_3$, so sind auch $m$, $n$ zwei unendlich nahe Punkte, und weil $T_3$ sowohl $t_2$ als auch $N_1$ schneidet, so wird der Schnittpunkt $n'$ von $T_3$ und $N_2$ ein zu $n$ unendlich naher Punkt sein, und ebenso muss der Schnitt $m'$ von $T_2$ und $N_3$ unendlich nahe zu $m$ sein. Und weil $T_2$ und $T_3$ die $t_1$ schneiden und $t_1$ auch die unendlich nahen Geraden $N_2 N_3$ trifft, so müssen auch $T_2$ und $T_3$ unendlich nahe zusammenrücken. Der Punkt, in welchem $m n m' n'$ vereinigt sind, ist folglich ein Knotenpunkt von $F_3$, weil durch ihn drei Gerade $N_2 t_2 T_2$ von $F_3$ hindurchgehen. Es gehen also durch diesen Knotenpunkt die drei binären Geraden $N_2 \equiv N_3$, $T_2 \equiv T_3$, $t_2 \equiv t_3$. In

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der Ebene $(T_2 t_2)$ liegt die Gerade $N_1$, in $(N_2 T_2)$ liegt $t_1$ und in $(N_2 t_2)$ liegt $T_1$. Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Ganzen neun Bisecanten von $R_6$; die durch den Knotenpunkt gehenden zwei Trisecanten $T_2 t_2$ vertreten sechs von diesen Bisecanten, so dass durch ihn noch drei Bisecanten von $R_6$ gehen werden, welche der $F_3$ angehören müssen, weil jede mit $F_3$ vier Punkte gemeinschaftlich hat. Jede von diesen Bisecanten muss eine $Q$-Gerade treffen, und keine zwei können dieselbe $Q$-Gerade treffen, weil sonst in einer durch diese $Q$-Gerade gehenden Ebene zwei Bisecanten liegen würden, was unmöglich ist. Diejenige, welche $Q_1$ trifft, ist die dritte Gerade in der Ebene $(Q_1 N_2) \equiv (Q_1 N_3)$, und somit ist sie sowohl $B_{12}$ als auch $B_{13}$; ebenso ist jene, welche $Q_2$ trifft, sowohl $B_{22}$ als auch $B_{23}$, und endlich ist die dritte, welche $Q_3$ trifft, sowohl $B_{32}$ als auch $B_{33}$. Es gehen also durch $\varkappa'$ auch die drei binären Geraden $B_{12} \equiv B_{13}$, $B_{22} \equiv B_{23}$, $B_{32} \equiv B_{33}$.

In den Ebenen $(N_1 Q_1)$, $(N_1 Q_2)$, $(N_1, Q_3)$ liegen die Bisecanten $B_{11}$, $B_{21}$, $B_{31}$. In den sechs Ebenen, welche $T_2$ und $t_2$ mit den drei durch $\varkappa'$ gehenden Bisecanten verbinden, liegen die sechs einpunktigen Secanten $e$, $E$. Jede einpunktige Secante muss zwei $Q$-Gerade treffen. In der Ebene $(T_2 B_{12})$ liegt eine einpunktige Secante, welche $Q_1$ nicht trifft (weil sonst durch den Schnitt von $Q_1$ und $B_{12}$ drei Gerade gingen); es kann dies also nur $e_1$ oder $E_1$ sein. Weil aber diese fragliche Gerade auch $T_3$ trifft, so wird es $E_1$ sein; es liegt also in der Ebene $(T_2 B_{12})$ die Gerade $E_1$. Ebenso erkennt man, dass in $(T_2 B_{22})$, respective $(T_2 B_{32})$, die Geraden $E_2$, respective $E_3$, liegen, ferner in den Ebenen $(t_2 B_{12})$, $(t_2 B_{22})$, $(t_2 B_{32})$ die Geraden $e_1$, $e_2$, $e_3$. Hiemit sind alle Geraden der Fläche $F_3$ erschöpft.

5. Wir haben endlich noch solche $F_3$ durch $R_6$ zu betrachten, welche nicht auf dem Hyperboloide $H$ liegende Knotenpunkte $\varkappa''$ besitzen. Wir werden später sehen, dass es vier solche Flächen gibt und wollen hier nur die Anordnung der Geraden einer solchen $F_3$ näher untersuchen.

Legt man durch $\varkappa''$ zu je zwei $Q$-Geraden eine Transversale, so wird dieselbe, weil mit $F_3$ vier Punkte gemeinsam habend, ganz auf $F_3$ liegen. Da jede von diesen drei Geraden zwei $Q$-Gerade schneidet, so können es nur einpunktige Secanten sein, und da jede durch den Knotenpunkt $\varkappa''$ gehende Flächengerade

zwei zusammenfallende windschiefe Gerade vertritt, so wird die durch $\varkappa''$ zu $Q_2$, $Q_3$ gelegte Transversale die beiden einpunktigen Secanten $E_1 \equiv e_1$ darstellen; ebenso ist $E_2 \equiv e_2$ die durch $\varkappa''$ zu $Q_1$, $Q_3$ gelegte Transversale und $E_3 \equiv e_3$ die durch $\varkappa''$ zu $Q_1$, $Q_2$ gelegte Transversale.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Ganzen neun Bisecanten von $R_6$ hindurch; die durch $\varkappa''$ gehenden müssen der Fläche $F_3$ angehören, weil jede mit ihr vier Punkte gemeinschaftlich hat; keine von ihnen kann mit einer der drei $E$-Geraden identisch werden, weil dies ja einpunktige Secanten sind. Anderseits gehen durch einen Knotenpunkt einer $F_3$ nur sechs Flächengerade; drei von ihnen haben wir bereits in $E_1$, $E_2$, $E_3$, so dass sich die sechs durch $\varkappa''$ gehenden Bisecanten auf drei Gerade reduciren müssen. Durch das Zusammenfallen zweier Bisecanten entsteht eine Trisecante, welche aber dann drei durch den Punkt gehende Bisecanten vertritt. Es werden also die neun durch $\varkappa''$ gehenden Bisecanten durch drei durch $\varkappa''$ gehende Trisecanten von $R_6$ dargestellt sein, und $\varkappa''$ erscheint somit als der Durchschnitt dreier Trisecanten.

„Jeder dem Hyperboloide $H$ nicht angehörige Knotenpunkt einer durch $R_6$ gehenden Fläche dritter Ordnung ist der Schnittpunkt dreier Trisecanten der Curve.“

Da auch die letzten drei Geraden binäre Gerade von $F_3$ sein müssen, so haben wir sie mit $T_1 \equiv t_1$, $T_2 \equiv t_2$, $T_3 \equiv t_3$ zu bezeichnen.

In den Ebenen $(T_2 T_3)$, $(T_3 T_1)$, $(T_1 T_2)$ liegen die drei Nichtsecanten $N_1$, $N_2$, $N_3$; und endlich liegen in den neun Ebenen $(E_i T_\varkappa)$ die neun Bisecanten $B_{i\varkappa}$ (siehe das Schema in der I. Mittheilung).

Dass es vier Flächen $F_3$ durch $R_6$ gibt, welche nicht auf $H$ gelegene Knotenpunkte $\varkappa''$ besitzen, folgt eigentlich schon aus der Zahl der Knotenpunkte des $F_3$-Büschels; im Ganzen müssen 32 Knoten auftreten, und da die 12 Schnittpunkte von $R_6$ mit den drei $Q$-Geraden 24 Knoten vertreten und auf jedem Doppelelemente der cubischen Erzeugendeninvolution auf $H$ ein Knoten liegt, so bleiben noch vier Knoten übrig, welche dem Hyperboloide $H$ nicht angehören.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

6. Die zwölf auf $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ liegenden Punkte von $R_6$, welche nach Früherem als Knotenpunkte von durch $R_6$ gehenden $F_3$ auftreten, kann man als durch $R_6$ schon gegeben betrachten und aus ihnen dann die 21 Geraden jeder dieser $F_3$-Flächen ableiten.

Zu den beiden Quadrupeln der übrigen acht Knotenpunkte und damit auch zu den zugehörigen acht $F_3$ kann man in folgender Art gelangen.

Es sei wie früher $\varkappa$ einer der zwölf Punkte von $R_6$, welche auf den drei $Q$-Geraden liegen; z. B. einer der vier Schnittpunkte von $R_6$ mit $Q_1$. Die durch $R_6$ gehende $F_3$, welche $\varkappa$ zum Knotenpunkte hat, wird das Hyperboloid $H$ ausser in den drei $Q$-Geraden noch in drei Geraden $N_1 N_2 N_3$ schneiden. Die erste von diesen drei Geraden, $N_1$, ist die durch $\varkappa$ zu $Q_2$, $Q_3$ gelegte Transversale. Wenn $t_2$, $t_3$ die beiden durch $\varkappa$ gehenden Trisecanten sind (welche $R_6$ ausser in $\varkappa$ noch in je zwei Punkten treffen), so muss $N_2$ in der Ebene $Q_1 t_2$ und $N_3$ in der Ebene $Q_1 t_3$ liegen. Wenn man also $Q_2$ und $Q_3$ mit der Ebene $Q_1 t_2$ schneidet und diese beiden Schnittpunkte verbindet, so hat man $N_2$; ebenso verbindet $N_3$ die Schnitte von $Q_2$, $Q_3$ und der Ebene $Q_1 t_3$. Die Tripel $N_1$, $N_2$, $N_3$, welche den einzelnen durch $R_6$ gehenden $F_3$ angehören, bilden auf $H$ eine cubische Involution, für welche wir (den 12 $\varkappa$ entsprechend) zwölf Tripel in der eben angegebenen Weise construiren können. Durch irgend zwei dieser Tripel ist die Involution bestimmt. Es seien $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ ihre vier Doppelemente, so liegt auf jeder dieser vier Geraden ein Knotenpunkt $\varkappa'$, und haben wir früher gezeigt, dass durch $\varkappa'$ zwei Trisecanten $t \equiv t_3$, $T_2 \equiv T_3$ und drei Bisecanten $B_{12} \equiv B_{13}$, $B_{22} \equiv B_{23}$, $B_{32} \equiv B_{33}$ hindurchgehen, von denen die erste $Q_1$, die zweite $Q_2$ und die dritte $Q_3$ schneidet. Es sind also z. B. $B_{12}$, $Q_2$ und $D_1$ drei in einer Ebene liegende Gerade; man wird also $B_{12}$ erhalten, wenn man $R_6$ mit der Ebene $Q_1 D_1$ schneidet und die zwei Schnittpunkte (welche ausser den vier auf $Q_1$ liegenden auftreten) mit einander verbindet. Ebenso ergibt sich $B_{22}$, respective $B_{32}$:

„Die drei Ebenen $Q_1 D_i$, $Q_2 D_i$, $Q_3 D_i$ [wobei $D_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ein Doppelelement der cubischen auf $H$ auftretenden Erzeugendeninvolution ist] bestimmen auf $R_6$ drei Punktepaare, deren drei Verbindungsgeraden sich in einem Punkte $\varkappa'_i$ von $D_i$ schneiden. Die vier

Punkte $\varkappa_i'$ sind Knotenpunkte für vier cubische durch $R_6$ gehende Flächen."

7. Um zu den vier Knotenpunkten $\varkappa''$ zu gelangen, welche dem Hyperboloide $H$ nicht angehören, betrachten wir das Flächenbüschel $F_3$; jede Fläche desselben enthält die sechs Geraden $E_i$, $e_i$ ($i = 1, 2, 3$), welche einpunktige Secanten von $R_6$ sind und jene zwei $Q$ schneiden, die den Index $i$ nicht tragen. Durch irgend eine einpunktige Secante, welche zwei der $Q$-Geraden trifft, ist die sie enthaltende $F_3$ des Büschels vollkommen bestimmt und somit auch jene zweite einpunktige Secante, welche dieselben zwei $Q$-Geraden schneidet. Die Paare $E_i\, e_i$ bilden somit auf einer Fläche vierter Ordnung vom Geschlechte Eins (I. Mittheilung, Art. 19) eine Paarinvolution $J_1^2$, und ebenso werden die beiden Punkte $(E_i)$, $(e_i)$, in denen die Geraden $E_i$, $e_i$ der $R_6$ begegnen, auf dieser Curve eine $J_1^2$ bilden. Diese $J_1^2$ hat vier Doppelpunkte (sie ist offenbar fundamental für die $R_6$), und es wird somit auch viermal vorkommen, dass die Geraden $E_i$ und $e_i$ identisch werden. Dies geschieht aber, wie wir gesehen haben, für jede Fläche, welche einen Knotenpunkt $\varkappa''$ besitzt, da in diesem Falle $E_1 \equiv e_1$, $E_2 \equiv e_2$, $E_3 \equiv e_3$ wird und diese Geraden durch $\varkappa''$ gehen (siehe Art. 5). Wenn man also durch die vier Doppelpunkte der $J_1^2$ zu den beiden $Q$-Geraden, welche den Index $i$ nicht tragen, Transversalen legt, so liegt auf jeder einer der vier Knotenpunkte $\varkappa''$. Den Werthen $i = 1, 2, 3$ entsprechend erhält man drei Paarinvolutionen $J_1^2$ mit dreimal vier, d. i. zwölf Doppelpunkten und somit auch zwölf Gerade (von denen jede zwei $Q$-Gerade trifft), die viermal zu je dreien durch einen Knotenpunkt hindurchgehen.

Die Paarinvolutionen, von denen gesprochen wurde, können in folgender Weise bestimmt werden. Jede Paarinvolution $J_1^2$ auf einem Träger vom Geschlechte Eins ist durch ein Elementenpaar bestimmt.

Um z. B. die $J_1^2$, welche durch die Punktepaare auf $E_1$, $e_1$ gebildet wird, zu erhalten, haben wir nur ein solches Geradenpaar zu construiren; dazu eignet sich irgend eine der vier $F_3$, welche Knotenpunkte $\varkappa$ auf der Geraden $Q_1$ besitzen. Es sei $\varkappa$ einer der vier Schnittpunkte von $Q_1$ mit $R_6$ und zugleich Knotenpunkt der Fläche $F_3$, für welche wir das Paar $E_1$, $e_1$ kennen; es ist nämlich nach Art. 3 die durch $\varkappa$ zu $Q_2$, $Q_3$ gelegte Transversale die Gerade

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$E_1$, während $e_1$ in der Ebene $t_2\, t_3$ liegt, wenn $t_2, t_3$ die beiden durch $\varkappa$ gehenden Trisecanten sind (welche $R_6$ ausser in $\varkappa$ noch je zweimal schneiden). Die dem Index $i = 1$ entsprechende $J_1^2$ ist also bestimmt, wenn man dem Punkte $\varkappa$ (als Schnittpunkt von $R_6$ mit $E_1$) den letzten Schnittpunkt von $R_6$ mit der Ebene $t_2\, t_3$ (als Schnittpunkt von $R_6$ mit $e_1$) als entsprechenden Punkt zuordnet. Zugleich haben wir den Satz:

„Durch jeden der vier Schnittpunkte $a, b, c, d$ einer Quadrisecante mit der Curve $R_6$ gehen zwei Trisecanten, deren Ebene die Curve in dem Punkte $a', b', c', d'$ respective schneiden möge; die vier Punktepaare $aa'$) $bb', cc', dd'$ gehören einer und derselben Paarinvolution auf $R_6$ an. So erhält man den drei Quadrisecanten entsprechend drei (fundamentale) Paarinvolutionen. Legt man durch die vier Doppelpunkte jeder dieser Involutionen die Transversalen zu den beiden Quadrisecanten, denen die betreffende Involution nicht entspricht, so erhält man zwölf Gerade, welche viermal zu je dreien durch vier Punkte $\varkappa''$ hindurchgehen. Diese Punkte $\varkappa''$ sind Knotenpunkte von vier durch $R_6$ hindurchgehenden Flächen dritten Grades.“

# ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Weyr Emil

Artikel/Article: Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins. 457-466