Über einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie

von

F. Buth in Leoben.

(Mit 3 Textfiguren.)

Der bekannte Fundamentalsatz Pohlke's lautet:

Drei beliebige von einem Punkte ausgehende Strecken in einer Ebene¹ können stets als die schiefe Projection von drei gleich langen zu einander senkrechten Strecken im Raume angesehen werden.

Da dieser Satz dem construirenden Geometer hinsichtlich der Wahl der Lage der Axen und der Verkürzungsmassstäbe die grösstmöglichste Freiheit gestattet, gesellt sich zu dem theoretischen Interesse, welches der Satz verdient, noch die praktische Bedeutung hinzu und so ist es begreiflich, dass sich viele Geometer damit befassten, die Richtigkeit des Satzes zu beweisen und Constructionen anzugeben, um die wahre Grösse der Strecken sowohl, sowie die Richtung des projicirenden Strahles zu finden.

¹ Mit der Beschränkung, dass höchstens zwei derselben in eine Gerade fallen dürfen und nur eine Null sein darf.

² Vergl. Pohlke darst. Geometrie, II. Aufl. Deschwanden, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1861 (S. 254), 1862 (S. 159) und 1864 (S. 273). Schwarz, Crelle, Journal für Math. 63. Bd. 1864. Reye, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1866 (S. 350). Fiedler, darst. Geometrie, III. Aufl. I. Theil, S. 334 u. s. w. Pelz, diese Berichte 1877. Peschka, ebenda 1878. Drasch Zeitschrift für das Realschulwesen, 1883. Schur, Mathematische Annalen, 1885. Mandl, diese Berichte, 1886. Im Journal f. Math., 106. Bd. 1890, S. 121—123, hat Herr A. Beck eine Construction, um aus den gegebenen Bildstrecken das Originalaxenkreuz zu ermitteln, mitgetheilt.

Es sei hier gestattet, der Reihe der publichten Beweise, die von verschiedenen Gedanken ausgehen, einen neuen Beweis anzuschliessen, welcher vielleicht aus dem Grunde nicht ohne Interesse sein dürfte, als er einfach ist und daher auch leichter im Gedächnisse behalten werden kann. Wir suchen den Beweis für die Richtigkeit des Pohlke'schen Satzes dadurch herzustellen, dass wir nachstehenden Satz beweisen:

"Irgend eine Ellipse und ein beliebiger Punkt in der Ebene derselben können stets als schiefe Projection der Basis und Spitze eines ganz beliebigen geraden Kreiskegels und insbesonders auch eines gleichseitigen¹ betrachtet werden."

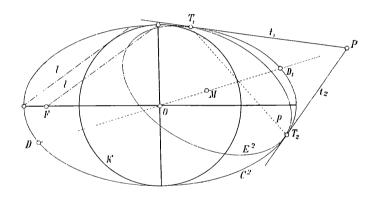


Fig. 1.

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir folgende Betrachtungen an: "Eine beliebige Ellipse C^2 , Fig. 1, kann stets als die schiefe Projection einer Kugel K angesehen werden."

Wir können die Grösse der Kugel und die Richtung C des projicirenden Strahles leicht angeben, indem wir erstere durch den Scheitelkreis K über der kleinen Achse der Ellipse und letztere in der Umlegung durch die Tangenten aus den Endpunkten der grossen Achse an diesen Scheitelkreis, oder durch

¹ Das ist eines solchen, bei welchem jeder zu einer Erzeugenden senkrechte Schnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, der also unendlich viele Tripel von zu einander senkrecht stehenden Erzeugenden hat.

Verbindung der Endpunkte der kleinen Achse mit den Brennpunkten F repräsentirt haben.

"Eine der Ellipse C^2 einbeschriebene Ellipse E^2 , siehe Fig. 1, welche die erstere doppelt berührt, ist die schiefe Projection eines ebenen Querschnittes jener Kugel.

Wir sehen die Richtigkeit des Ausgesprochenen ein, wenn wir E^2 als die Basis eines Cylinders, dessen Erzeugende parallel mit der Richtung des projicirenden Strables gehen, nehmen; dieser Cylinder hat dann mit dem die Kugel projicirenden, also auch mit der Kugel zwei Tangentialebenen gemeinsam, durchdringt daher die Kugel in zwei ebenen Querschnitten, also in Kreisen, deren gemeinsame Projection eben jene Ellipse E^2 ist. Hiebei ist P der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von C^2 und E^2 , die schiefe Projection der Spitze des an die Kugel längs eines dieser ebenen Querschnitte berührend gelegten Kegels und auf dem der gemeinsamen Berührungssehne conjugirten Durchmesser OM gelegen. "Ein Kreis auf einer Kugel und der Mittelpunkt der Kugel sind aber jederzeit Basis und Spitze eines Rotationskegels."

Ist nun eine Ellipse E^2 und ein Punkt O in ihrer Ebene gegeben, so bedarf es nur mehr der Annahme eines Punktes P auf OM von der oben gegebenen Bedeutung um die Contour C^2 einer Kugel, von welcher E^2 die Projection eines ebenen Querschnittes ist, zu bestimmen und hiedurch E^2 und O als Projection der Basis und Spitze eines geraden Kreiskegels binzustellen.

Um aber den durch E^2 und O abgebildeten Kegel zu einem gleichseitigen zu machen, hat man nichts weiter zu thun als MP gleich $2\ MO$ zu machen.

Betrachten wir, siehe Fig. 2, ein einem Kreise einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck ABC, so finden wir die Höhe MO des gleichseitigen Kegels über diesem Kreise, indem wir über der

Legt man aus P an E^2 die Tangenten t_1 und t_2 und bestimmt die Berührungspunkte T_1 , T_2 , so kennt man von der Contourellipse den Mittelpunkt und zwei Tangenten mit den Berührungspunkten und hat die Mittel diese entweder aus den conjugirten Durchmessern etc. zu construiren, oder die Axen und Brennpunkte direct zu bestimmen. (Siehe auch Pelz, Axenconstruction der Kegelschnitte, diese Berichte, Bd. LXXIII, 1876.)

Höhe AD des gleichseitigen Dreieckes als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, dessen Mittelpunkt ω leicht erhalten wird. AO

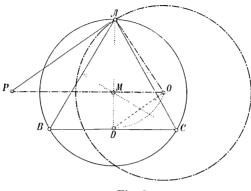


Fig. 2.

ist dann die Länge der Erzeugenden und der Halbmesser der durch den Kreis gelegten Kugel, welche O zum Mittelpunkt hat und P ist die Spitze des die Kugel längs dieses Kreises berührenden Kegels. Aus den beiden Dreiecken MOD und MPA welche, wie ersichtlich ist, ähnlich sind, ergibt sich aber wegen $MA = 2 \ MD$ für den gleichseitigen Kegel unmittelbar $MP = 2 \ MO$.

Sind demnach in Fig. 3, OA, OB, OC die schiefen Projectionen dreier Strecken O_0 A_0 , O_0 B_0 und O_0 C_0 des Raumes, so legen wir durch ABC eine Ellip-

se, welche wir als Projection schiefe eines Kreises ansehen, jedoch so, dass wir zugleich ABC als die schiefe Projection eines gleichseitigen Dreieckes betrachten. Dieses wird aber bekanntlich erreicht, den wenn man

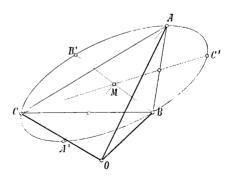


Fig. 3.

Schwerpunkt M des Dreieckes ABC zum Mittelpunkt der umbeschriebenen Ellipse nimmt. Hiedurch wird eine Ellipse bestimmt, 'und diese Ellipse und O bilden nach dem Vorausgeschickten die schiefe Projection der Basis und Spitze eines gleichseitigen Kreiskegels. A_0, B_0, C_0 ist ein gleichseitiges Dreieck, dem Basiskreis eingeschrieben und daher $O_0 A_0$, $O_0 B_0$ und $O_0 C_0$ drei gleich lange und zu einander senkrechte Strecken, und der Poblke'sche Satz hiedurch bewiesen.

Für die Bestimmung der Originallänge der Strecken und der Richtung des projicirenden Strahles würde man nur die Axen der Ellipse C^2 zu construiren haben; indem man auf der Verlängerung der Höhe über M hinaus diese Höhe zweimal aufträgt, erhält man den Punkt P, und die Tangenten aus diesem an die Ellipse, die mit M als Mittelpunkt dem Dreieck ABC umschrieben wurde, gelegt, gibt die Hilfsmittel, um auf verschiedenen Wegen zu den gewünschten Resultate zu gelangen; jedoch wollen wir diese Constructionen hier nicht weiter verfolgen.

Wie bei diesem Gedankengang eine Verallgemeinerung des Satzes für ein beliebiges Axensystem bewiesen wird, bedarf wohl keiner weiteren Erörterung.

¹ Macht man MA' = MA, MB' = MB, MC' = MC, so erhält man in A'B'C' drei weitere Punkte; überdies, und das ist für die Construction des Originaldreibeins nützlich, wenn man die Affinitätzwischen Kreis und Ellipse verwerthet, sind die Seiten des Dreieckes den Verbindungsstrahlen der Gegenecken mit dem Schwerpunkt conjugirt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: <u>Sitzungsberichte der Akademie der</u> <u>Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse</u>

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Ruth Peter

Artikel/Article: Über einen neuen Beweis des PohlkeÂ'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie. 1088-1092