©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über Krümmung und Indicatricen der Helikoide

J. Sobotka in Zürich.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Mai 1892.)

Wir betrachten ein allgemeines Helikoid H, erzeugt durch Schraubung einer Curve u, für die wir in der Lage sind, in jedem Punkte die Schmiegungsebene und den Krümmungsmittelpunkt zu construiren.

1. Wir wollen uns zunächst mit der Construction der Hauptkrümmungsmittelpunkte für einen Punkt A des Helikoides beschäftigen.

Hiebei gehen wir von dem folgenden Satze aus:

»Denkt man sich auf einer Fläche H beliebige Curven, die alle durch einen Punkt A gehen und bestimmt die Flächen der Normalen zu H längs dieser Curven, so berühren alle einander in zwei Punkten G, H der Normalen n zu H, die durch A geht. Die Punkte G und H sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Fläche H, die dem Punkte A entsprechen. Die gemeinschaftlichen Berührungsebenen aller Normalflächen in G und H sind zu einander normal und enthalten die Hauptkrümmungskreise der Fläche H im Punkte A.«[1]

Im gegenwärtigen Falle sind durch A auf der Fläche H unmittelbar zwei Curven bestimmt; erstens die Curve u^a als die den Punkt A enthaltende Lage der erzeugenden Curve u und

---

[1] Man sehe A. Mannheim: Cours de géométrie descriptive 1880, p. 276, wo der obige Satz unter dieser Ausdrucksform aufgestellt ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zweitens die Schraubenlinie l als die durch A gehende Bahncurve des entsprechenden Punktes auf n.

Was die Normale n anbelangt, so sei (Fig. 1)[1] t die Tangente an u^α, t' die Tangente an l in A; beide Tangenten bestimmen die Tangentialebene des Helikoides in A, deren Spur in der um den reducirten Schraubengang (pas réduit) γ unterhalb A liegenden Normalebene der Schraubung s heissen möge. n_1[2] ist normal zu s_1 und der Spurpunkt S von n in die genannte Ebene lässt sich ohneweiters darstellen.

Ziehen wir nun die beiden Normalflächen U^α und L des Helikoides längs der Curven u^α, beziehungsweise l in Erwägung.

Wir wissen, dass das Büschel von Tangentialebenen durch n, welches wir der Fläche U^α umschrieben denken, zu der Reihe der entsprechenden Berührungspunkte auf n projectivisch ist. Dessgleichen bezüglich der Fläche L.

Sucht man also die Berührungspunkte jeder Ebene des Büschels mit den beiden Flächen U^α, L, so sind dieselben zwei entsprechende Punkte der so auf n entstehenden projectivischen Punktereihen. Die zwei sich selbst entsprechenden Punkte dieser Punktereihen sind die in Frage stehenden Krümmungsmittelpunkte G und H.

Umgekehrt, sucht man die Berührungsebenen in jedem Punkte auf n zu den beiden Flächen U^α und L, so sind dieselben zwei sich entsprechende Ebenen der so entstehenden projectivischen Ebenenbüschel durch n. Die zwei sich selbst entsprechenden Ebenen dieser Büschel sind die Hauptkrümmungsebenen.

Zur Lösung unserer Aufgabe ist also nothwendig und hinreichend, dass wir zu irgend drei Ebenen des Büschels die ent-

---

[1] Die Darstellung geschieht durch die orthogonale Projection eine Normalebene zur Schraubungsaxe. Der Kürze halber wird diese Projection als Hauptprojection bezeichnet. Der Sinn der Schraubung wird durch einen Pfeil angedeutet.

[2] Die Hauptprojection eines Gebildes Σ wird mit Σ_I, deren Bild mit Σ_1 bezeichnet; ähnlich wird die Orthogonalprojection in eine zweite Ebene mit Σ_{II}, deren Bild Σ_2 u. s. bezeichnet. Der reducirte Schraubengang γ wird durch den in der Projectionsebene liegenden Kreis (γ) vom Halbmesser γ mit dem Mittelpunkt in der Schraubungsaxe ausgedrückt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

sprechenden Berührungspunkte mit U^α und L oder umgekehrt angeben können, was den Gegenstand folgender Erwägungen ausmachen möge.

2. Was zuerst die Fläche U^α anbelangt, so ist (t, n) die Berührungsebene in A; ihre Spur heisse a.

Ist weiter K der Krümmungsmittelpunkt von u^α im Punkte A, so trifft die Normale aus diesem Mittelpunkte zu der Schmiegungsebene (K, t) von u^α die Normale n im Punkte B, welcher nach dem Satze von Meusnier der Mittelpunkt des Krümmungskreises in A für die Schnittcurve der Ebene (t, n) mit dem Helikoide ist.

Nach einem bekannten Satze[1] ist die Ebene (t, n) normal zu der Fläche U^α im Punkte B; demgemäss berührt die durch n normal zu (t, n) gelegte Ebene die Fläche U^α im Punkte B.

Übrigens kommen wir zu diesem Ergebniss sogleich, wenn wir die Normalenfläche des durch den Krümmungskreis von u^α in A erzeugten Helikoides längs dieses Kreises in seine Ebene orthogonal projiciren.

Ist o die Spur der Schmiegungsebene (K, t) in die früher erwähnte Normalebene der Schraubung, so schneidet die Senkrechte aus K_1 zu o_1 das Bild der Normale n in B_1.

Die Tangentialebene in B ist senkrecht zu t; ihre Spurlinie b_1 ist desshalb senkrecht zu t_1 und geht durch S_1; dass (K_1, A_1) durch den Schnitt von o_1 mit b_1 gehen muss, braucht wohl nicht bemerkt zu werden.

Endlich wollen wir noch den Berührungspunkt C der Fläche U^α mit der projicirenden Ebene von n bestimmen, deren Spurlinie c_1 also mit n_1 zusammenfällt.

Die Projection C_1 dieses Punktes können wir als den Schnittpunkt von n_1 mit der Projection der Normalen n' des Helikoids in dem auf der Curve u^α unendlich nahe an A gelegenen Punkte A' construiren.

Zu dem Behufe legen wir durch z_1 — die Projection der Schraubenaxe — die Senkrechte zu t_1 und von ihrem Schnittpunkte $\mathfrak{A}_1$ mit n_1 die Senkrechte o_1' zu o_1.

A. Mannheim, O., S. 279.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Man sieht leicht die Bedeutung dieser Construction. Wählt man für den Richtungskegel der Curve u^α die Spitze auf der Schraubungsaxe z, dann ist derselbe bestimmt durch seine Spur in der Normalebene der Schraubung, welche um γ unterhalb der Spitze liegt. Denken wir uns diesen Richtungskegel um z im Sinne der Schraubung um 90° gedreht, so ist $\mathfrak{A}_\mathrm{I}$ die Projection des gedrehten Spurpunktes der zu t parallelen Erzeugenden des Kegels und o'_I ist die Projection der gedrehten Spur der Tangentialebene des Kegels längs dieser Erzeugenden.

Hieraus ergibt sich, dass die Senkrechte aus z_I zu der Tangente in A'_I an u^α_I die Projection von n' in einem Punkte $\mathfrak{A}'_\mathrm{I}$ trifft, der gleichfalls auf o'_I liegt.

Die Parallele zu $(z_\mathrm{I}, \mathfrak{A}_\mathrm{I})$ durch A_I und die Parallele zu $(z_\mathrm{I}, \mathfrak{A}'_\mathrm{I})$ durch A'_I begegnen einander im Mittelpunkte $\mathfrak{K}$ des Krümmungskreises von u^α_I in A_I, welcher im vorhinein aus K_I abgeleitet werden kann. So bestimmen z. B. die durch K_I gezogene Parallele und Senkrechte zu o_I, ferner die Tangente t_I und die Senkrechte zu ihr durch A_I als Tangenten eine Parabel, deren Berührungspunkt mit der zuletzt genannten Geraden der Punkt $\mathfrak{K}$ ist.

Die Verbindungsgerade $(A_\mathrm{I}, A'_\mathrm{I})$ kann durch t_I ersetzt werden, und wir gelangen so zu folgendem Resultat.

Das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{K}$ bestimmt auf t_I eine Punktereihe; verschieben wir es parallel so, dass sein Mittelpunkt nach z_I kommt, so schneidet es auf o'_I eine zur ersten projectivische Punktereihe. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte beider Punktereihen umhüllen einen Kegelschnitt, welcher von n_I im Punkte C_I berührt wird.

Die Parallele $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{K}$ zu o'_I und die Parallele $\mathfrak{q}$ durch z_I zu t_I sind gleichfalls Tangenten dieses Kegelschnittes. Wir sind also im Stande, mit Hilfe des dem Kegelschnitte umschriebenen Fünfecks $(\mathfrak{p}, o_\mathrm{I}, \mathfrak{q}, t_\mathrm{I}, n_\mathrm{I})$ den Berührungspunkt von n_I nach dem Satze von Brianchon zu construiren. Man braucht bloss durch den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ und n_I die Parallele zu t_I, ferner durch A_I die Parallele zu $\mathfrak{p}$ zu ziehen und den gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{J}$ beider Parallelen mit dem Schnitte Q von o'_I und $\mathfrak{q}$ durch eine Gerade zu verbinden, welche n_I in dem gesuchten Punkte C_I trifft.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Erheischt es die Genauigkeit der Construction, so kann man natürlich jede der hier hervorgehobenen Tangenten durch eine beliebige andere Tangente des Kegelschnittes ersetzen.

3. Die Fläche L ist ein windschiefes Helikoid, welches durch die Schraubung von n um z erzeugt wird.

Wir können entweder seine Berührungspunkte mit den Ebenen (n, a), (n, b), (n, c) oder seine Berührungsebenen in den Punkten A, B, C ermitteln. Wir thuen das Letztere.

Die Tangentialebene des Helikoides L im Punkte A ist (t', n), ihre Spur heisse a'.

Construiren wir in jeder Ebene des Büschels durch n diejenige Gerade grössten Falles gegen die Projectionsebene, welche den Berührungspunkt dieser Ebene mit L enthält, so schneiden alle diese Fallgeraden bekanntlich die zur Projectionsebene normale Gerade f des orthogonalen Hyperboloids, welches sie bilden.

Das Bild f_1 dieser Geraden erhält man im Schnitte der beiden Senkrechten von A_1 auf a'_1 und von z_1 auf n_1, oder wenn man auf die letztgenannte Senkrechte von z_1 im entsprechenden Sinne die Strecke (A_1, S_1) überträgt.

Demnach ist die Senkrechte b'_1 von S_1 auf (f_1, B_1) das Bild der Spur für die Tangentialebene des Helikoides L in B und die Senkrechte c'_1 von S_1 auf (f_1, C_1) das Bild der Spur für seine Tangentialebene in C.

Jetzt erübrigt noch in den projectivischen concentrischen Strahlenbüscheln $a_1, b_1, c_1, \ldots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, \ldots$ die Doppelelemente g_1, h_1 mit Hilfe eines beliebigen, durch S_1 gezeichneten Kreises zu construiren.

Die Ebenen (g, n) und (h, n) sind die Hauptkrümmungsebenen des gegebenen Helikoids in A.

Die Senkrechten von f_1 auf g_1 und h_1 treffen n_1 in G_1, beziehungsweise H_1.

Kürzer noch kommt man auf folgende Weise zum Ziele. In den gesuchten Punkten G und H haben die Flächen U^α und L gemeinschaftliche Normalen; die Normalenparaboloide beider Flächen längs n haben die unendlich ferne Gerade der zu n senkrechten Ebenen mit einander gemein und erzeugen auf derselben zwei ineinanderliegende projectivische Reihen, deren

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Doppelpunkte den Normalen aus G und H angehören. Überträgt man diese Beziehung auf die Projectionen der Normalenparaboloide, so kommt man zur nachstehenden Construction. Man zieht, soweit dies noch nicht geschehen, durch f_1 die Senkrechten α', β', γ' zu a_1, b_1, c_1 und die Geraden α'', β'', γ'' nach A_1, B_1, C_1; hiedurch bekommt man zwei Tripel von Strahlen, welche zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel bestimmen, deren Doppelstrahlen φ','', ψ','' auf n_1 die Punkte G_1, H_1 herausschneiden.

Die Senkrechten von S_1 zu (f_1, G_1) und (f_1, H_1) sind die Geraden g_1 und h_1.

Der Punkt G ist nun der Krümmungsmittelpunkt der Schnittcurve der Ebene (h, n), der Punkt H der Krümmungsmittelpunkt der Schnittcurve der Ebene (g, n) mit dem Helikoid im Punkte A.

Der Werth $\frac{1}{\overline{(AG)} \times \overline{(AH)}}$ ist das Krümmungsmaass des Helikoids für den Punkt A.

Die Verbindungsgeraden des Punktes A mit den Schnittpunkten (h, s) und (g, s) sind die Axen der Indicatrix; die Quadrate ihrer Längen sind den Strecken $\overline{AG}$, resp. $\overline{AH}$ proportional; man kann also die Indicatrix selbst construiren.

4. Wenn die Projection der behandelten Gebilde in eine Normalebene der Schraubung für die Construction ungünstig ausfällt, so nimmt man eine zweite Projection in eine zur Schraubungsaxe parallele Ebene zu Hilfe. Dies gilt insbesondere für Punkte der Curve u^α, in denen die Schmiegungsebene parallel zur Schraubungsaxe ist, in welchem Falle alle vorigen Darstellungen unverändert anwendbar bleiben mit Ausnahme der des Punktes C, für den die angegebene Construction versagt; im Wesen kann dieselbe jedoch beibehalten werden.

Wir haben da die orthogonale Darstellung in zwei Ebenen gewählt; in die um γ unterhalb des Punktes A liegende Normalebene der Schraubung und in die zu ihr normale Schmiegungsebene der Curve u^α in A (Fig. 2). Die Spitze $\mathfrak{V}$ des Richtungskegels für u^α wählen wir in gleicher Höhe mit A und denken uns diesen Kegel in die durch z gelegte, zur zweiten Projectionsebene normale Ebene projicirt. Wir bezeichnen diese

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Projection als die dritte. Dann wird nach der üblichen Darstellungsweise $\mathfrak{V}_3$ auf dem Kreise (γ_1) liegen und $(\mathfrak{V}_3, A_3)$ parallel zu (K_2, A_2) sein, und da $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_3$ zusammenfällt, so haben wir den früheren Erwägungen gemäss folgendes Resultat.

Das Strahlenbüschel durch K_2 bestimmt auf t_2 eine Punktereihe. Projiciren wir diese orthogonal auf t_1, so bekommen wir eine zweite Punktereihe, welche projectivisch ist mit der auf o'_1 durch das Büschel $\mathfrak{V}_3$ gebildeten Punktereihe, wobei jedem Strahle durch K_2 der Parallelstrahl durch $\mathfrak{V}_3$ entspricht. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf t_1 und o'_1 umhüllen einen Kegelschnitt, welcher von n_1 in C_1 berührt wird.

Die Parallele $\mathfrak{p}_1$ durch K_1 zu o'_1 und die Parallele $\mathfrak{q}_1$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{L}_1$ der Normalen aus $\mathfrak{V}_3$ zu $(\mathfrak{V}_3, A_3)$ mit o'_1 sind gleichfalls Tangenten dieses Kegelschnittes.

Die weitere Construction, um zum Punkte C_1 zu gelangen, stimmt nun wörtlich mit der früher gegebenen überein.

Die Construction gestaltet sich also sehr einfach.

Wenn speciell die Schmiegungsebene in A an die Curve u^α durch die Axe z geht, so übt dieser Umstand keinen Einfluss auf die eben auseinandergelegte Construction aus; sie wird mit denselben Hilfsgeraden ausgeführt.

Darin liegt auch die Lösung unseres Problems für diejenigen Helikoide, welche durch ihre Meridiancurven gegeben sind.

Ist die Osculationsebene der Curve u^α im Punkte A normal zur Schraubungsaxe, so fällt der Punkt C mit dem Punkte B zusammen; wir müssen noch eine weitere Berührungsebene durch n an die Fläche U^α benützen. Als solche wählen wir die asymptotische Ebene, welche leicht zu bestimmen ist; ihre Spur ist nämlich parallel zu (z_1, K_1). Denn ist k der Krümmungskreis der Curve u^α in A, so nimmt, wenn u^α durch die Schraubung in die unendlich nahe Lage u' gelangt, der Kreis k die Lage k' und der Punkt A die Lage A' ein. Durch k und k' ist eine Cylinderfläche bestimmt und es ist klar, dass dieselbe in den Punkten A und A' gemeinschaftliche Normalen mit dem Helikoide besitzt; oder mit anderen Worten, die Normalenfläche des Cylinders und die Fläche U^α berühren einander längs der Erzeugenden n, haben also in allen ihren Punkten gemeinschaftliche Tangentialebenen. Die Richtung der Cylinderfläche

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ist die Tangente an die durch K beschriebene Helix. Es ist darum die Normalebene zu dieser Tangente die Richtungsebene der Normalenfläche des Cylinders längs k und ihre Spur ist thatsächlich parallel zu $(z_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{I}})$.

Hiedurch gestaltet sich die Construction womöglich noch einfacher, als in den früheren Fällen.

Darin liegt auch die Lösung unseres Problems für diejenigen Helikoide, welche durch ihre Normalcurven, d. h. durch Curven, welche in Normalebenen der Schraubung liegen, gegeben sind.

Übrigens ist allgemein die durch n parallel zu $(C_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{I}})$ gelegte Ebene eine asymptotische Ebene der Fläche U^{α}, worauf wir noch später zurückkommen.

Die letzte Construction führt bequem bei den windschiefen Helikoiden zum Ziele, da man die Krümmungsmittelpunkte in den Punkten der Normalcurve bei diesen Flächen, wie bekannt, auf sehr kurzem Wege erhalten kann.[1] Wir werden aber sehen, dass sich diese Construction für alle Helikoide verwenden lässt.

5. Besonders einfach gestaltet sich die an der Fläche U^{α} durchgeführte Construction für solche Punkte A auf der Curve u^{α}, in denen die Tangente t eine Gerade grösster Neigung in der Schmiegungsebene in A von u^{α} in Bezug auf eine Normalebene der Schraubung ist.

Erstens ergibt sich der Punkt $\mathfrak{K}$ aus K oder umgekehrt in aller Kürze.

Zweitens degenerirt der zur Aufsuchung von C_{I} verwendete Kegelschnitt; wir gelangen zu einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt C_{I} ist, so dass sich dieser Punkt als der Schnittpunkt von n_{I} mit $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}_{\mathrm{I}})$ ergibt.

Auf diesen Fall lässt sich auch die allgemeine Construction überführen.

Nehmen wir auf dem Helikoide eine beliebige Curve v^{α} an, welche von t im Punkte A berührt wird, so hat die Normalenfläche V^{α} des Helikoids längs der Curve v^{α} mit U^{α} die Er-

---

[1] Man sehe z. B. Dr. L. Burmester: Kinematik, I. Bd., 1888, Capitel von den cyclischen Curven. Eine Construction der Hauptkrümmungscentra der schiefen geschlossenen Schraubenfläche und der Wendelfläche findet sich bei A. Mannheim, a. a. O., S. 381 f.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zeugende n und in den Punkten A, G, H derselben die Tangentialebenen gemeinschaftlich; demnach berühren beide Flächen einander längs der Normalen n, so dass für unseren Zweck es einerlei ist, welche von den Flächen U^α, V^α wir in Betracht ziehen.

Wir wählen nun die Curve v^α so, dass für ihre Schmiegungsebene in A die Tangente t eine Gerade grösster Neigung in Bezug auf eine Normalebene der Schraubung ist.

Bezeichnen wir den Krümmungsmittelpunkt von v^α in A mit K' und den Krümmungsmittelpunkt von v^α_{I} in A_{I} mit $\mathfrak{K}'$ Führen wir nun (Fig. 1) durch B_{I} die Parallele zu t_{I}, so trifft diese nach dem Satze von Meusnier die Gerade $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K})$ in K'_{I}. Aus der Länge (A, K') und dem Neigungswinkel der Tangente t von der Projectionsebene wird der Krümmungsradius $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}')$ von v^α_{I} erhalten und hiemit ist die angestrebte Überführung vollzogen.

Vergleichen wir nun das durch die Geraden $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{J})$, $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K})$ und $(\mathfrak{J}\,\mathfrak{P})$ gebildete Dreieck mit dem Dreiecke $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{A}_{\mathrm{I}}, Q)$. Diese Dreiecke sind ähnlich und ähnlich gelegen, C_{I} ist ihr Ähnlichkeitspunkt; folglich geht auch die Verbindungsgerade der Scheitel ihrer rechten Winkel durch C_{I}. Es wurde nachgewiesen, dass diese Verbindungsgerade $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ durch $\mathfrak{K}'$ geht, woraus folgt, dass $\mathfrak{K}'$ der Scheitel des rechten Winkels im erstgenannten Dreiecke ist.

Aus dieser Betrachtung folgt ferner: Zieht man durch $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$ die Senkrechte zu o_{I} bis zum Schnitte $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$ mit n_{I} und von hier die Parallele zu t_{I} bis zum Schnitte $\mathfrak{K}'_{\mathrm{I}}$ auf $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}_{\mathrm{I}})$, so trifft die Gerade $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}'_{\mathrm{I}})$ das Bild n_{I} der Normale in C_{I}. Wir sehen, dass sich hiedurch die Auffindung von C ziemlich verkürzt.

Ebenso ist klar, wenn wir auf $(\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{I}})$ den Punkt $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ so bestimmen, dass $\overline{A_{\mathrm{I}}\, z_{\mathrm{I}}} \times \overline{z_{\mathrm{I}}\, \mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} = \gamma^2$, dass $(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}, K'_{\mathrm{I}})$ gleichfalls durch C_{I} geht, was wieder auf kurzem Wege C_{I} mit Benützung von K'_{I}, also aus bekanntem K_{I} finden lässt.

Für den in (Fig. 2) dargestellten Fall stimmt diese Construction mit der früher gegebenen in Durchführung vollständig überein.

Da, wie bemerkt worden, $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ parallel ist zur Spur der durch n gelegten asymptotischen Ebene von U^α, so folgt daraus,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wenn wir das die Fläche U^α längs n berührende hyperbolische Paraboloid P, welches die projicirende Ebene der Spur a zur Richtungsebene hat, construiren, dass $(B_I, \mathfrak{K}')$ die Projection einer Erzeugenden dieses Paraboloids ist, dass also $(B_I, \mathfrak{K}') \parallel a$ ist. Daraus ersieht man, wie aus einem der Punkte K_I, $\mathfrak{K}$, K_I^7, $\mathfrak{K}'$ jeder der anderen drei rasch ermittelt wird.

6. Handelt es sich um die Indicatrix des Helikoides im Punkte A, so wird man zuerst den Punkt C ermitteln.

Durch A geht die Schraubenlinie l des Helikoids. Denken wir uns längs dieser Schraubenlinie die berührende Developpable umschrieben; die ist bekanntlich ein entwickelbares Helikoid, dessen erzeugende Geraden die Fallgeraden der Tangentialebenen des gegebenen Helikoids in den Punkten von l in Bezug auf eine Normalebene der Schraubung sind.[1] Die Hauptprojectionen dieser Fallgeraden fallen mit den Hauptprojectionen der Normalen zusammen.

Demnach ist nach dem Theorem von Dupin die Tangente t' in A an die Schraubenlinie l und diese Fallgerade m', für die $m'_I \equiv n_I$ ein Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix.

Denken wir uns ferner längs u^α die das gegebene Helikoid berührende developpable Fläche. Wählen wir auf der Schraubungsaxe die Spitze des Richtungskegels dieser Developpablen, den wir durch seine Spur in die um γ unterhalb seiner Spitze befindliche Normalebene der Schraubung bestimmen wollen und drehen diese Spur um die Schraubungsaxe im Sinne der Schraubung um 90°, so ist in dieser Lage ihre Hauptprojection identisch mit der Contour der Hauptprojection für die Normalfläche U^α. Wenn also die Projection der Normalen n zum Helikoid in einem Punkte A der Curve u^α die Contour in C_I berührt, so ist die durch z_I zu (C_I, z_I) errichtete Senkrechte die Projection derjenigen Erzeugenden des Richtungskegels, welche parallel läuft zu der durch A gehenden Erzeugenden der längs u^α umschriebenen Developpablen.[2]

---

[1] Man sehe: Dr. W. Fiedler, Darstellende Geometrie, 3. Aufl. II. Bd. S. 468.

[2] Man sehe meine Abhandlung »Über developpable Flächen der windschiefen Helikoide«, welche demnächst erscheinen wird. Man vergleiche Th. Schmid: »Über Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide« im XCIX. Bd., X. Heft, S. 952 u. f. dieser Sitzungsberichte.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Normale m_{I} aus A_{I} zu $(C_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{I}})$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu $(\mathfrak{K}', z_{\mathrm{I}})$, bestimmt in der Tangentialebene des Helikoids in A die Gerade m, welche mit t nach dem Dupin'schen Theorem ein weiteres Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix repräsentirt.

Die zwei Paare conjugirter Tangenten $t'm'$, tm bestimmen die Indicatrix vollständig.

Gleichzeitig ist durch diese zwei Paare die Durchmesserinvolution der Indicatrix bestimmt, wobei sich diese involutorische Beziehung auch auf die Projectionen überträgt.

Es lässt sich demgemäss zu jedem Durchmesserstrahl der conjugirte, ihm in der Involution entsprechende nach bekannten Regeln leicht construiren.

Hieraus ergibt sich eine einfache Construction von Tangenten an Berührungscurven der Helikoide mit umschriebenen developpablen Flächen. Die Construction der Tangenten an die Curven der Selbstschattengrenzen, an die Berührungscurven mit Kegelflächen von gegebenem Mittelpunkte, an die Isophoten und Isophengen, welche Curven oft schon Gegenstand darstellend geometrischer Behandlung geworden sind, ist darin als Specialfall mitenthalten.

Ebenso löst man die umgekehrte Aufgabe, aus den Tangenten einer Curve auf dem Helikoid die entsprechenden Erzeugenden der längs dieser Curve umschriebenen developpablen Fläche und somit des Richtungskegels derselben zu finden.

Die Doppelstrahlen der erwähnten Involution geben die Asymptoten der Indicatrix an.

Durch jede dieser Asymptoten ist eine Schraubungsregelfläche bestimmt, welche das gegebene Helikoid längs der betreffenden Schraubenlinie osculirt, d. h. welche drei einander unendlich benachbarte Schraubenlinien des gegebenen Helikoids enthält.

Hat man die Indicatrix in A durch die Strahlenpaare $t'm'$, tm bestimmt, so kann man die Hauptkrümmungscentra G und H wieder ermitteln. Man construirt das Rechtwinkelpaar rr' der Durchmesserinvolution; die Ebenen (r, n), (r', n) sind die Hauptkrümmungsebenen; ihre Berührungspunkte mit dem

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

durch n erzeugten Helikoide L, oder mit dem vorerwähnten Paraboloide P, in beiden Fällen sehr rasch construirbar, sind die gesuchten Hauptkrümmungscentra.

Bemerkung 1. Denken wir uns die Projection n_I der Normalen in A zu dem Helikoide um z_I im der Schraubung entgegengesetzten Sinne um 90° gedreht und bezeichnen sie in dieser neuen Lage mit v. Wählen wir dann auf der Schraubungsaxe den Punkt V oberhalb der Projectionsebene in der Entfernung γ. Durch V ist in der Ebene (V, v) ein Strahlenbüschel bestimmt.

Wir betrachten nun die dem Helikoide umschriebenen Cylinderflächen, deren Richtungen durch die Strahlen des eben bestimmten Büschels gegeben sind.

Man sieht zunächst, dass die Berührungscurven e. dieser Cylinderflächen mit dem Helikoide alle durch den Punkt A gehen. Aus dem in diesem Paragraphe Erläuterten folgt, dass alle Normalen des Helikoids längs irgend einer Berührungscurve e eine zur Schraubungsaxe parallele Gerade c schneiden. Ist nun E der Spurpunkt der durch V gehenden Richtungsgeraden für die umschriebene Cylinderfläche, so braucht man bloss denselben um z_I im Sinne der Schraubung um 90° zu drehen, um in seiner neuen Lage C_I die Projection der Geraden c zu erhalten, oder die Senkrechte von z_I zu (z_I, E) schneidet n_I in dem Punkte C_I.

Stimmt die Richtung der umschriebenen Cylinderfläche mit der mit m bezeichneten Geraden überein, so sieht man — (Fig. 1) — da $m_I \perp (z_I, C_I)$, dass C_I die Projection der Geraden c ist. Die Normalfläche E längs e hat mit der Fläche U^α in den Punkten G, H, C gemeinschaftliche Berührungsebenen, beide Flächen berühren demnach einander längs n, woraus folgt, dass e und u^α in A die Tangente t gemeinschaftlich haben Die Normalenfläche E hat die zu m normale Ebene zur Richtungsebene, woraus folgt, dass (z_I, C_I) parallel zur Spur der asymptotischen Ebene der Fläche U^α durch n ist, worauf im Früheren bereits Bezug genommen worden ist.

Denselben Schluss liefert folgende Überlegung.

Die Gerade t verbindet die unendlich nahe gelegenen Punkte A, A' des Helikoids, denen die Normalen n, n' zugehören.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Gerade m als der Schnitt der Berührungsebenen des Helikoids in A und A' ist senkrecht zu beiden Normalen n, n', also senkrecht zu der durch n parallel zu n' gelegten Ebene, welche die asymptotische Ebene durch n für die Fläche U^{α} ist. Da nun $m_{\mathrm{I}} \perp (z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ ist, so folgt daraus, dass $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ parallel zur Spur der asymptotischen Ebene sein muss.[1]

Bemerkung 2. Wir haben gesehen, wie man die Tangenten an die Berührungscurve irgend eines Helikoids mit einer umschriebenen Developpablen construirt. Trifft man überdies den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{K}$ der Projection dieser Berührungscurve in A_{I} construiren, so lässt sich dann auch die Osculationsebene der Berührungscurve selbst und deren Krümmungsmittelpunkt K, sowie der Krümmungsmittelpunkt ihrer Projection in eine beliebige andere Ebene je in dem entsprechenden Punkte einfach construiren. Denn für diesen Fall ist der Punkt C_{I} im Voraus bekannt. $(C_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{I}})$ schneidet aus $(A_{\mathrm{I}}\ \mathfrak{K})$ den Punkt $\mathfrak{K}'$ heraus, aus dem K und die Spur der Osculationsebene auf die früher angegebene Weise gefunden wird.

7 In dem Vorangehenden ist auch eine einfache Lösung der folgenden Aufgabe enthalten:

Das Helikoid ist durch die Curve u und durch die Schraubung gegeben, man soll das Krümmungscentrum für den Punkt A irgend einer Curve x auf dem Helikoid, deren Osculationsebene in A bekannt ist finden.

Schneidet die Osculationsebene die Berührungsebene des Helikoids für den Punkt A in der Geraden t^{ξ}, so ist diese die Tangente an x in A. Da man in A leicht die zwei Paare conjugirter Durchmesser t, m; t' m' der Indicatrix ermitteln kann, so lässt sich ohneweiters der zu t^{ξ} conjugirte Durchmesser m^{ξ} derselben hieraus construiren.

Errichtet man zu m_{I}^{ξ} die Senkrechte aus z_{I}, so trifft dieselbe n_{I} im Punkte C_{I}^{ξ}, wodurch man durch n für die Normalenfläche des Helikoids längs x drei Berührungsebenen mit ihren Berührungspunkten kennt, nämlich die Ebene $(t^{\xi}\ n)$, welche in A berührt, die projicirende Ebene von n, welche in C^{ξ} berührt und schliesslich die asymptotische Ebene, welche durch n

---

[1] Man vergleiche A. Mannheim, O., S. 300 u. f.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

parallel zu $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}}^{\xi})$ geht. Man kann demnach den Berührungspunkt einer jeden vierten Ebene durch n ermitteln.

Für die durch A zu t^{ξ} senkrechte Ebene ist der Berührungspunkt B^{ξ} gleichzeitig der Krümmungsmittelpunkt der Schnittcurve des Helikoids mit der Ebene (t^{ξ}, n) im Punkte A. Fällt man dann von B^{ξ} die Senkrechte zur Osculationsebene von x in A, so trifft sie dieselbe in dem fraglichen Krümmungsmittelpunkt.

Ist also X der Spurpunkt von t^{ξ} und S der Spurpunkt von n wie früher, so führt man durch A_{I} die Senkrechte zu t_{I}^{ξ} und durch deren Schnittpunkt mit $(z_{\mathrm{I}}\, C_{\mathrm{I}}^{\xi})$ die Parallele zu (X, S), welche bereits aus n_{I} den Punkt B_{I}^{ξ} herausschneidet.

Darin ist auch die Construction der Krümmungsmittelpunkte für die Meridiancurven sowohl wie auch für die Normalcurven der Helikoide mitenthalten; für die letzteren ist insbesondere die Länge $(A_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}}^{\xi})$ schon der entsprechende Krümmungsradius.

Dieselbe Construction gestattet auch die Hauptkrümmungscentra G und H auf die möglichst einfachste Weise zu finden. (Fig. 3).

Denken wir uns den Hauptschnitt des Helikoids durch A in der Ebene (r, n). Der Krümmungsmittelpunkt dieses Hauptschnittes sei G. Es ist klar, da auf der Normalfläche längs dieses Hauptschnittes die zu n unendlich nahe Normale n' des Helikoids von n im Punkte G geschnitten wird, dass der Punkt C dieses Falles mit G zusammenfällt.

Da r, r' als Axen der Indicatrix einander conjugirt sind, so folgt, dass die Senkrechte von z_{I} zu den Geraden r_{I}' und r_{I} die Projection der Normale n_{I} respective in G_{I} und H_{I} schneidet.

Betreffs der Darstellung von r und r' kann noch Folgendes bemerkt werden.

Wir schneiden die Involution $t_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{I}}', m_{\mathrm{I}}'$. etwa mit dem Kreise l_{I}; der Pol der hiedurch auf l_{I} gebildeten Involution heisse $\mathfrak{F}$. Die Involution $t_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}; t_{\mathrm{I}}' m_{\mathrm{I}}'$ ist mit der Involution $t, m; t', m'$ perspectivisch. Beide Involutionen bestimmen dieselbe Punktinvolution auf s. Sucht man in dieser Punktinvolution dasjenige Paar, welches von A aus unter rechtem Winkel gesehen wird, so sind dessen Verbindungsstrahlen mit

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

A_I die Geraden r_I, r_I'; bildet man den Schein dieser Punktinvolution von A_I aus, so gelangt man demnach zu zwei Strahleninvolutionen um den Punkt A_I, für die r_I, r_I' das gemeinsame Strahlenpaar sind. Dreht man das Strahlenbüschel A um s, bis es in die Hauptprojectionsebene, als welche wir gegenwärtig die durch s gehende Normalebene der Schraubung betrachten, hineinfällt, dann kann man ohneweiters beliebige zwei Paare der durch die Rechtwinkelinvolution auf s herausgeschnittenen Punktinvolution darstellen. Überträgt man nun diese Punktinvolution mittelst des Scheines aus A_I wieder auf den Kreis l_I, so bekommt man jetzt $\mathfrak{F}'$ als Pol der Involution. Man hat nun auf l_I zwei Punktinvolutionen, deren gemeinsames Punktepaar R, R' auf der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ liegt, und es ist endlich $(A_I, R) \equiv r_I$, $(A_I\, R') \equiv r_I'$.

Versagt uns die Hauptprojection den Dienst, so wenn n parallel zur Hauptprojectionsebene wird, oder liefert ihre Darstellung ungenaue Resultate, so wird man eine zweite Orthogonalprojection in eine zu parallele Ebene zu Hilfe nehmen.

Man hat stets nur Folgendes im Auge zu behalten.

Ist t^* die Tangente in A an irgend eine durch A gehende Curve q des Helikoides, so ist die zu t^* conjugirte Tangente m^* normal zu der durch n gelegten asymptotischen Ebene der Normalenfläche Q des Helikoides längs der Curve q. Weiter, wenn man auf der Axe z den Punkt Z in der Entfernung γ über der Hauptprojectionsebene annimmt, die Indicatrix in A zuerst parallel zu sich selbst verschiebt, so dass A nach Z gelangt, und nachher sie im Sinne der Schraubung um 90° dreht, so repräsentirt jedesmal der Spurpunkt von m^* in dieser letzten Lage die Projection C_I des Punktes C auf der Fläche Q, wie aus dem im vorigen Paragraphe Erläuterten folgt. Hienach kann man m^* finden, wenn man C_I kennt und umgekehrt.

In dem speciellen Falle, wo n parallel zur Hauptprojectionsebene ist, wird man vortheilhaft diese in der Entfernung γ unterhalb des Punktes A, die zweite Projectionsebene parallel zu der Berührungsebene des Helikoides in A wählen. Bei der Bestimmung der früher besprochenen Berührungspunkte wird man die projectivische Beziehung zwischen den Abbildungen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der zweiten Projectionen der Tangentialebenen und der Hauptprojectionen ihrer Berührungspunkte benützen.

8. Wir wollen uns noch mit einem speciellen Helikoide S beschäftigen und an ihm die entwickelten Betrachtungen anstellen.

Die erzeugende Curve des Helikoids sei irgend eine Schraubenlinie w mit einer zu z parallelen Schraubungsaxe $\mathfrak{z}$. (Fig. 4.)

Aus dieser Annahme folgt, dass für alle Punkte der Curve w^α die Länge der Tangente t für den Höhenunterschied γ (in Richtung von z) constant bleibt; es bleibt also auch die früher mit $(z_\mathrm{I}, \mathfrak{A}_\mathrm{I})$ bezeichnete Länge constant, und demnach werden alle Punkte die $\mathfrak{A}_\mathrm{I}$ analog sind, auf einem Kreise e_I liegen, der in z_I seinen Mittelpunkt hat.

Da $(z_\mathrm{I}, \mathfrak{A}_\mathrm{I}) \| (\mathfrak{z}_\mathrm{I}^\alpha, A_\mathrm{I})$, so geht n_I durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise w_I^α und e_I und zwar durch den äussern, wenn der Schraubungssinn von w mit dem der Schraubung um z übereinstimmt, im entgegengesetzten Falle durch den innern. Dies gilt für alle Normalen des Helikoids in den Punkten der Curve n^α. Die projicirende Gerade c dieses Ähnlichkeitspunktes C gehört also der Normalfläche W^α längs w^α an.

Wenn γ' der reducirte Schraubungsgang für w ist, so gilt die Relation $(z_\mathrm{I}\ C_\mathrm{I})\ \ (\mathfrak{z}_\mathrm{I}^\alpha\ C_\mathrm{I}) = \gamma\ \ \gamma'$

Nimmt man demnach auf der Axe z den Punkt Z in der Entfernung γ über der Projectionsebene, auf der Axe $\mathfrak{z}^\alpha$ den Punkt Z^α in der Entfernung γ' entweder über oder unter der Projectionsebene an, je nachdem der Sinn von w mit dem der Schraubung um z gleich oder ihm entgegengesetzt ist, dann fällt also der Spurpunkt von (Z, Z^α) in den Punkt C_I hinein.

Die Contur der Hauptprojection von W^α ist nach dem Gesagten der Punkt $c_\mathrm{I} \equiv C_\mathrm{I}$; der Richtungskegel der längs w^α dem Helikoide umschriebenen developpablen Fläche geht also in eine Gerade über; die Developpable selbst ist eine Cylinderfläche. Dreht man den Punkt C_I um z_I im entgegengesetzten Sinne der Schraubung um 90°, so gelangt er nach E und repräsentirt die Spur der Geraden (Z, E), welche die Richtung der Cylinderfläche angibt, oder mit anderen Worten, dreht man (Z, Z^α) um z im entgegengesetzten Sinne der Schraubung um

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

90°, so gibt diese Gerade in ihrer neuen Lage die Richtung der Cylinderfläche an.

Daraus geht unmittelbar hervor, dass man in jedem Punkte A des Helikoids S zwei conjugirte Durchmesserpaare der Indicatrix sogleich angeben kann. Das eine Paar liefert die Gerade t mit der durch A zu (Z, E) gezogenen Parallelen m, das zweite Paar ist die Tangente t' mit der Fallgeraden m' der Tangentialebene (t, t') in Bezug auf unsere Hauptprojectionsebene.

Die Fläche W^α ist desshalb gleichzeitig die Normalenfläche der längs w^α dem Helikoid umschriebenen, soeben abgeleiteten Cylinderfläche, sie ist darum eine Conoidfläche, deren Richtungsebene zu m normal ist.

Die Normalcurve des Helikoids S ist eine cyklische Curve; denn bei einer Drehung von $\mathfrak{z}_I$ um z_I um eine gewisse Bogenlänge dreht sich der Spurpunkt von w um $\mathfrak{z}_I$ gleichfalls um eine gewisse Bogenlänge und beide Bogenlängen stehen im constanten Verhältniss zu einander.

Aus den Eigenschaften der cyclischen Curven folgt, dass der um z_I als Mittelpunkt mit dem Radius (z_I, C_I) beschriebene Kreis (c_I) der Basiskreis ist, auf welchen der Kreis vom Mittelpunkte $\mathfrak{z}_I^\alpha$ und vom Radius $(\mathfrak{z}_I^\alpha, C_I)$ rollt, bei welcher Bewegung der mit dem rollenden Kreise starr verbunden gedachte Punkt A_I diejenige cyclische Curve beschreibt, welche die Hauptprojection der Normalcurve für das Helikoid S in der durch A gelegten Normalebene der Schraubung ist.[1]

Wir sehen hier eine vollständige Analogie dieser Schraubungsfläche mit einer Schraubungsregelfläche und es ist unsere Fläche S die zunächst liegende Verallgemeinerung der windschiefen Schraubungsflächen. Die interessanten Constructionen, die so vielfach schon an diesen durchgeführt worden sind, lassen sich Schritt für Schritt für jene in derselben Art durchführen; ich erwähne insbesondere die Construction von Berührungscurven mit developpablen Flächen von gegebenem Richtungskegel und umgekehrt.

---

[1] Man sehe Dr. L. Burmester: Kinematik, I. Bd., 1888, das Capitel über die cyclischen Curven; Dr. Chr. Wiener, Darstellende Geometrie, II. Bd., 1887, S. 343 u. f. —

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ist die erzeugende Schraubenlinie w von demselben Sinn wie die Schraubung um z und hat sie überdies mit dieser gleichen Schraubungsgang, so rücken die Geraden c ins Unendliche, die Normalcurve der Fläche wird zum Kreise, dessen Radius gleich $\overline{z_{\mathrm{I}}\, \mathfrak{z}_{\mathrm{I}}}$ ist und wir erkennen in diesem Falle sofort aus unserer Betrachtung die Erzeugung der Schraubungsfläche, wir wollen sie mit S′ bezeichnen, als Rückungsfläche. Diese Fläche S′ ist in den Schraubungsregelflächen der normalen analog.

Im allgemeinen Falle, wo das Helikoid durch eine beliebige Curve u gegeben ist, kann man von der Fläche S, respective S′ mit Vortheil Gebrauch machen.

Wir bestimmen den Punkt K'_{I} und etwa den Punkt $\mathfrak{L}$, wie früher angegeben worden ist. Die Gerade $(K'_{\mathrm{I}}, \mathfrak{L})$ trifft n_{I} in $C_{\mathrm{I}} \equiv c_{\mathrm{I}}$; weiter trifft $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ die Gerade $(A_{\mathrm{I}} K'_{\mathrm{I}})$ im Punkte $\mathfrak{K}'$, welcher, wie leicht zu sehen, identisch ist mit $\mathfrak{z}^{\alpha}_{\mathrm{I}}$. Wir haben übrigens gesehen wie $\mathfrak{K}'$ in jedem besonderen Falle construirt wird; wir sind also stets imstande die Axe $\mathfrak{z}^{\alpha}$ und ebenso auch die Schraubenlinie w^{α}, welche die Länge (A, K') zum Krümmungsradius und (t, K') zur Osculationsebene in A hat, zu construiren. Dass das durch w^{α} in der Schraubung um z bestimmte Helikoid S das gegebene Helikoid H längs der durch A gehenden Schraubenlinie l osculirt, ist nun evident.

Dieses Ergebniss gibt uns sogleich die Construction des Krümmungsmittelpunktes der Normalcurve von H für den Punkt A. Man wird den Krümmungsmittelpunkt der betreffenden cyklischen Curve als der Normalcurve von S construiren, was jederzeit rasch bewerkstelligt werden kann.[1] Im allgemeinen Falle errichtet man zu $(A_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ die Senkrechte durch C_{I}, den Schnittpunkt dieser Senkrechten und der Geraden $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}')$ verbindet man mit z_{I}; die Verbindungsgerade bestimmt schon durch ihren Schnittpunkt auf $(A_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ den gesuchten Krümmungsmittelpunkt N.

Hiemit hat man auch die das Helikoid H längs l osculirende Fläche S′ ermittelt.

---

[1] Man sehe Dr. L. Burmester: Kinematik, I. Bd., 1888, das Capitel über die cyklischen Curven; Dr. Chr. Wiener, Darstellende Geometrie, II. Bd., 1887, S. 343 u. f. — u.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

9. Ist $\gamma = o$, so degenerirt die Schraubungsfläche H in eine Rotationsfläche (mit vielfacher Bedeutung, fügen wir hinzu).

Unsere Ergebnisse lassen sich ohneweiters auch auf diese Flächen übertragen.

Um die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Rotationsfläche im Punkte A zu ermitteln, kann man unbeschadet der Allgemeinheit eine zweite Ebene, in die wir orthogonal projiciren parallel zu (A, z) wählen.

Die Normalenfläche L längs des durch A gehenden Kreises l ist bekanntlich ein Kegel, dessen Spitze der Punkt C ist, in welchem die Normale n in A die Axe z schneidet. Der Punkt C ist auch schon ein Hauptkrümmungsmittelpunkt.

Der zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt ist nach Früherem der Berührungspunkt der Ebene (t', n) mit der Normalenfläche U^α längs der durch A gehenden erzeugenden Curve u^α.

Stellt man die Spuren a, b, c der Tangentialebenen dieser Fläche in den Punkten A, B, C dar und berücksichtigt die projectivische Beziehung zwischen a_I, b_I, c_I. und A_I, B_I, C_I. so hat man, bezugnehmend auf die Darstellung bei den Helikoiden durch B_I die Parallele zu a zu ziehen, ihren Schnittpunkt auf der Senkrechten $(A_I, \mathfrak{K})$ zu t_I mit z_I zu verbinden, dann gibt diese Verbindungsgerade i_I die Richtung der Spur in der ersten Projectionsebene für die durch n gelegte asymptotische Ebene von U^α. Die durch den Schnittpunkt von t'_I mit i_I gezogene Parallele zu a_I schneidet auf n_I den Punkt M_I heraus, welcher die erste Projection des zweiten Krümmungsmittelpunktes M ist.

Dieser Punkt M ist bekanntlich der Krümmungsmittelpunkt der Meridiancurve im Punkte A.

Hätte man die Curve u^α durch die Schraubenlinie w^α mit dem Krümmungsmittelpunkt K' und der Osculationsebene (K', t) wie früher ersetzt, so würde wieder die Projection der Schraubungsaxe $\mathfrak{z}^\alpha$ mit $\mathfrak{K}'$ zusammenfallen. Die Richtung für die längs w^α der Rotationsfläche umschriebene Cylinderfläche sei p; dreht man $\mathfrak{z}_I^\alpha$ im Sinne der Schraubenlinie w^α um 90° um die Axe z, so kann man in dieser Lage von $\mathfrak{z}_I^\alpha$ den Spurpunkt der Richtungsgeraden p annehmen, welche dann z in einem Punkte in der Entfernung γ' über der Projectionsebene schneidet, wie aus der allgemeinen Beziehung unmittelbar folgt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Daraus ergibt sich, dass die Gerade i_{I} wiederum mit $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}')$ zusammenfällt.

Was nun die Indicatrix der Rotationsfläche betrifft, so liefert für dieselbe t mit der durch A parallel zu p gezogenen Geraden m ein Paar, t' mit der durch A in Bezug auf eine Normalebene der Drehung gezogenen Fallgeraden m' der Tangentialebene (t, t') d. h. mit der Tangente an die Meridiancurve ein zweites Paar conjugirter Durchmesser, genau so wie früher.

Und weiter, wäre d die Berührungscurve der Rotationsfläche mit irgend einer umschriebenen developpablen Fläche, von der etwa der Richtungskegel gegeben wäre, so kann man hiedurch die durch A gehende Erzeugende der Developpablen angeben und man kann hieraus die Tangente der Curve d in A finden und umgekehrt. Würde man überdies imstande sein, den Krümmungsmittelpunkt von d_{I} für den Punkt A_{I} zu construiren, so würde man daraus die Osculationsebene und den Krümmungsmittelpunkt von d in A ebenso finden, wie es bei den Helikoiden abgeleitet worden ist. Gleiches gilt auch für die Bestimmung des dem Punkte A entsprechenden Krümmungsmittelpunktes der Schnittcurve irgend einer durch A gelegten Ebene mit der Rotationsfläche.[1]

Den Krümmungsmittelpunkt M der Meridiancurve kann man auch dadurch finden, dass man die mit der gegebenen coaxiale Rotationsfläche zweiten Grades construirt, welche die gegebene längs des Kreises l osculirt; d. h. welche mit ihr drei unendlich benachbarte Kreise gemein hat. Durch diese drei Kreise ist eine einzige solche Fläche zweiten Grades bestimmt. Ihren Schnitt $\mathfrak{u}$ mit der Osculationsebene von u^{α} in A können wir construiren, da wir von ihm den Punkt A mit dem ihm entsprechenden Krümmungsmittelpunkt K und eine Axe, nämlich die Schnittgerade der Osculationsebene mit der durch z zu ihr normalen Ebene kennen.

Wir wollen nun den Meridiankegelschnitt k der Fläche zweiten Grades in der Ebene (A, z) bestimmen. Von demselben ist der Punkt A mit der Tangente m' in ihm bekannt; beide bestimmen zwei unendlich nahe Punkte der Meridiancurve, wir

---

Man vergleiche Dr. Chr. Wiener a. a. O. II. Bd. S. 547 u.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fig. 1.

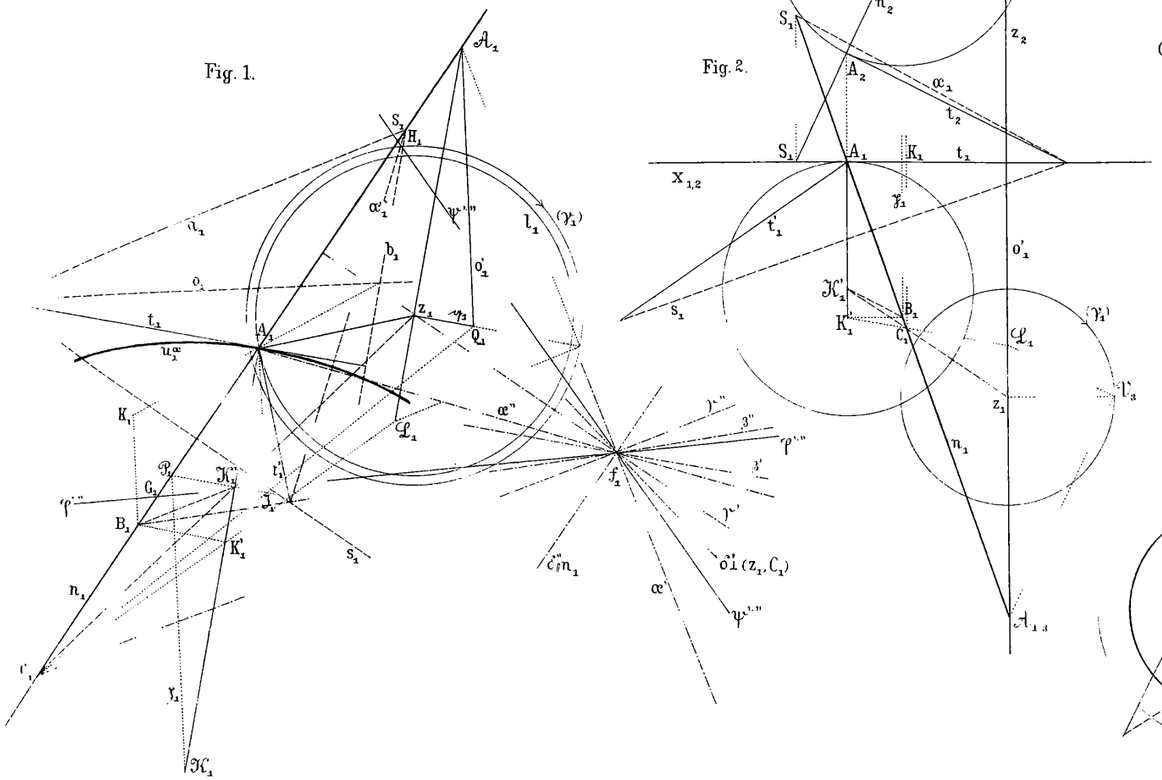


Fig. 2.

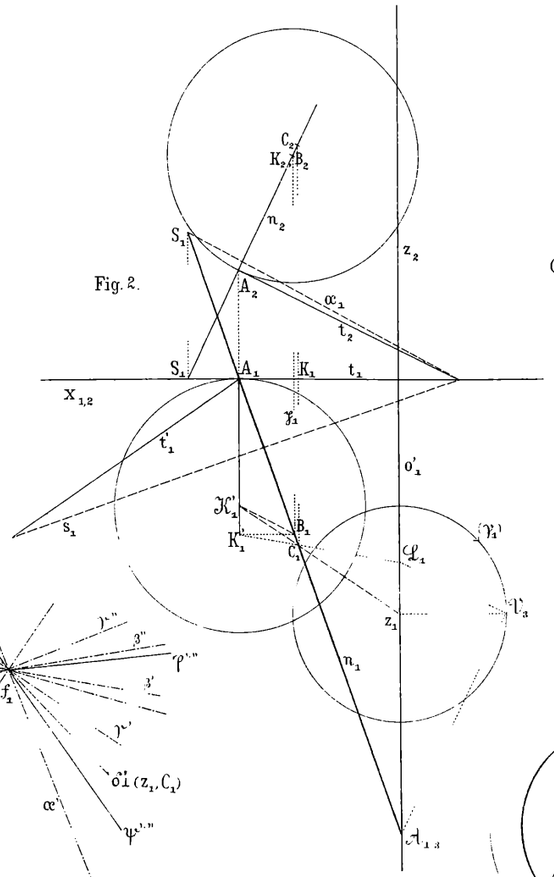


Fig. 3.

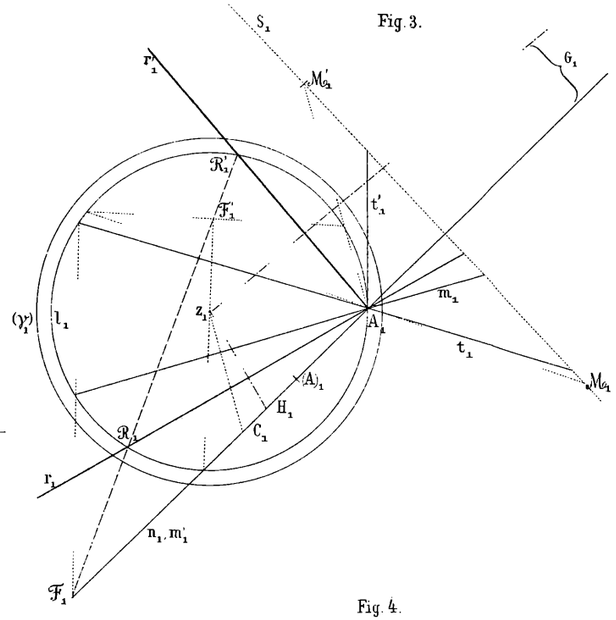


Fig. 4.

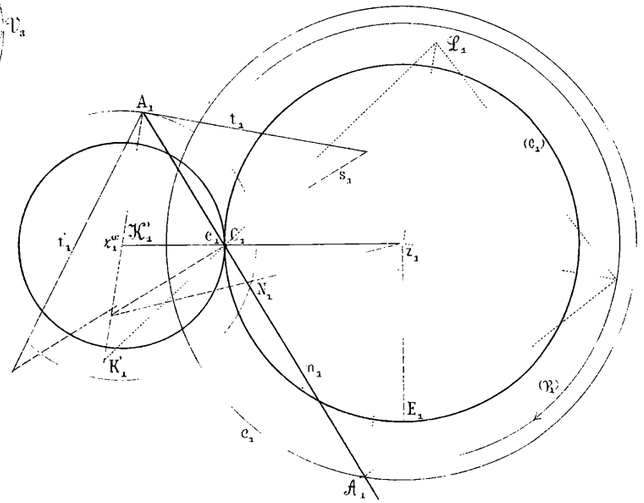
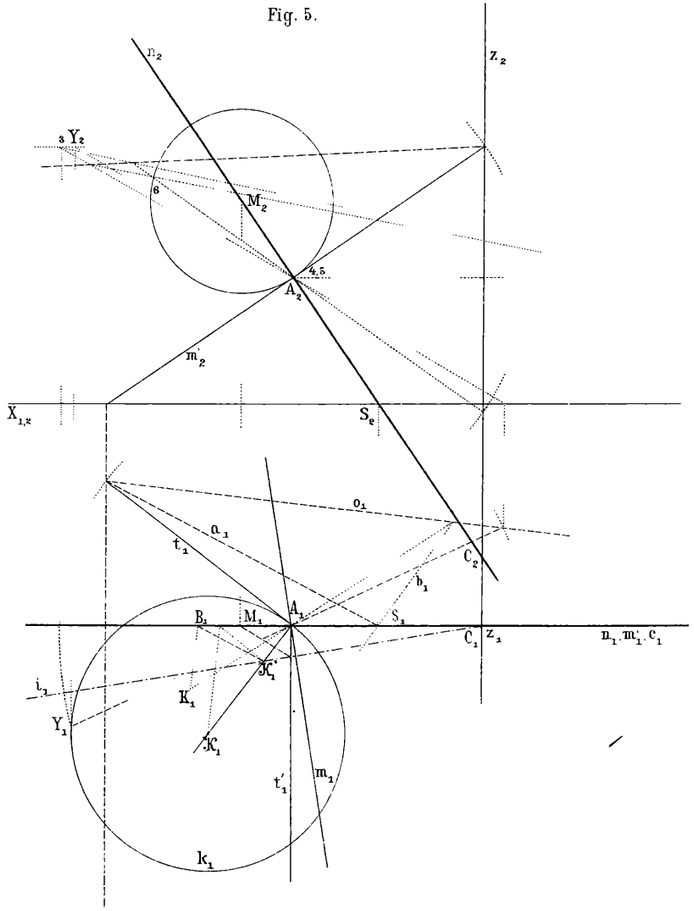


Fig. 5.



Lith. Anstalt v. J. Barth VI, Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bezeichnen sie mit 4 und 5. Zu diesen liegen symmetrisch in Bezug auf z die Punkte 1 und 2.

Es erübrigt also noch einen Punkt von k zu bestimmen. Dazu ist nur nothwendig, einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{u}$ zu finden und ihn um z zu drehen, bis er in den Meridian hineinfällt.

Kennen wir beispielsweise $\mathfrak{K}$, also den Krümmungskreis $\mathfrak{k}$ von u_{I}^{α} in A_{I}, so können wir von der centrisch collinearen Lage von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{u}_{\mathrm{I}}$ hiebei Gebrauch machen. Zieht man durch A_{I} die Gerade, welche mit der Spur o der Osculationsebene einen ebenso grossen Winkel einschliesst wie t_{I}, so ist diese Gerade die Collineationsaxe; sie trifft $\mathfrak{k}$ im Punkte Y_{I}, welcher dem Kegelschnitte angehört. Da Y in der Osculationsebene liegt, so lässt sich Y_2 aus Y_1 ohneweiters ableiten. Nun drehen wir den Punkt Y bis er in den Meridian kommt und bezeichnen ihn in dieser Lage mit 3. Jetzt ist der Meridiankegelschnitt vollständig bestimmt.

Einen weiteren Punkt von k suchen wir auf der durch A gezogenen Geraden, welche mit z denselben Winkel einschliesst wie m'. Wir bezeichnen ihn mit 6. Wir können jetzt das Pascal'sche Sechseck 123456 construiren, welches uns den Punkt 6 liefert.

Der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Punkte 1, 2, 6 gelegt wird, ist der gesuchte Punkt M.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): Sobotka J.

Artikel/Article: Über Krümmung und Indicatricen der Helikoide. 899-919