©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über ein Paar unicursaler Degenerirungscurven dritter Ordnung des Normalenproblems und das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschaar

Josef Tesař,

Professor an der k. k. deutschen Staats-Gewerbeschule zu Brünn.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juli 1892.)

Das Normalenproblem des Kegelschnittes besitzt heute bereits eine eigene Literatur.

Anknüpfend an die grundlegenden Arbeiten von Chasles, Joachimsthal, Weyr, haben die Herren Eckardt, Pelz, Röllner, Lauermann, Schoute, Mertens u. a. dem Probleme theils neue Seiten abzugewinnen, theils die einschlägigen Fragen an die Discussion verwandter geometrischer Probleme zu knüpfen gewusst.

Der derzeitige Stand der Forschung auf diesem Gebiete weist unter Anderem auf die Beantwortung zweier Fragen hin, wovon die erste, von Pelz aufgeworfen und durch den Hinweis auf zwei Ellipsendiameter theilweise beantwortet, dahin zielt, die geometrischen Örter aller Punkte der Ebene eines Kegelschnittes zu bestimmen, für welche das Normalenproblem in zwei quadratische, mittels Zirkel und Lineal graphisch durchführbare Probleme zerfällt.

Lauermann, der die Existenz zweier Kreise nachwies, für deren Punkte das Normalenproblem der Ellipse in zwei quadratische Probleme degenerirt, hat zwar bereits in seiner der kaiserlichen Akademie zu Wien am 21. Februar 1889 vorgelegten und in deren Sitzungsberichten publicirten Abhandlung: »Zum Normalenproblem der Ellipse«, die Bedingung,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

unter welcher für die Ellipse das Normalenproblem in zwei quadratische zerfällt, formulirt; doch scheinen ausser den Pelz'schen Diametern und den Lauermann'schen Kreisen keine anderen Degenerirungscurven des Normalenproblems[1] — so sollen fernerhin die einzelne Curven bildenden geometrischen Örter aller Punkte, für die das Normalenproblem in zwei quadratische zerfällt, genannt werden — studirt worden zu sein.

Die andere der beiden angezogenen Fragen bezweckt die Verallgemeinerung, Übertragung des Normalenproblems von einem Einzeln-Kegelschnitt auf ein Kegelschnittsystem, Büschel, auf eine reine oder gemischte Schaar.

Im Hinblick auf die Thatsache, dass sich das Normalenproblem für einen beliebigen Punkt und Kegelschnitt zurückführen lässt auf die Aufsuchung der gemeinschaftlichen Punkte oder Tangenten zweier Kegelschnitte, von denen im Allgemeinen nur einer in einen Kreis übergehen kann, soll die zweite Frage folgendermassen gefasst werden:

»Kann ein (vom Kreise verschiedener) Kegelschnitt aufgestellt werden, dessen Verzeichnung es ermöglicht, mittelst Zirkel und Lineal von einem bestimmten Punkte der Ebene eines Kegelschnittsystems auf jeden Einzeln-Kegelschnitt desselben das Normalenquadrupel zu fällen?«

Einen wenn auch bescheidenen Beitrag zur Beantwortung beider dieser Fragen soll diese Abhandlung liefern.

Vor Allem soll gezeigt werden, dass »das Normalenproblem einer Schaar confocaler Kegelschnitte« sich zurückführen lässt auf die Verschneidung einer einzigen Hyperbel mit den einzelnen Kreisen eines Kreisbüschels, woraus eine constructive Lösung dieses Normalenproblems resultirt, die keine weitere Vereinfachung zulässt.

Durch einfache Schlüsse gelangen wir ferner zu einem Paare unicursaler Degenerirungscurven dritter Ordnung für einen Mittelpunktskegelschnitt.

Es sollen an der Hand der Construction die Eigenthümlichkeiten dieser Degenerirungscurven hervorgehoben werden, wo-

[1] Die Eckart'schen Kreise werden hier nicht berücksichtigt, da für deren Punkte das Normalenproblem in ein Problem ersten und dritten Grades zerfällt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bei geeigneten Orts auf die geometrische Verwandtschaft derselben mit der (symmetrischen) »focale à noeud« hingewiesen werden wird, einer Curve, welche, wie bereits Röllner bemerkte, mit dem Normalenproblem der Kegelschnitte im innigen Zusammenhange steht.

§. 1.

Wir stellen an die Spitze der Untersuchung folgenden bekannten Satz:

Die sich in einer Geraden YY nach dem Brechungsgesetze des Lichtes brechenden Strahlen eines Strahlenbüschels F bilden das Normalensystem eines Mittelpunktskegelschnittes C_2, dessen Nebenaxe mit YY, dessen ein Brennpunkt mit F zusammenfällt und dessen Haupt-Halbaxe a gleich ist dem Quotienten aus der Excentricität dieses Kegelschnittes in den Brechungsexponenten, dessen reciproker Werth mit m bezeichnet werden möge.

Versteht man unter α und β den Winkel, welchen der einfallende, bezüglich der gebrochene Strahl mit dem Einfallsloth einschliesst, so folgt:

$$m = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \qquad 1)$$

$$a = mc. \qquad .2)$$

Wir folgern hieraus:

»Ist umgekehrt C_2 ein beliebiger Mittelpunktskegelschnitt, ($A_1A_2 = 2a$ seine Haupt-, $B_1B_2 = 2b$ seine Nebenaxe, O der Mittelpunkt, F_1, F_2 sein Brennpunktspaar, c seine Excentricität) und M ein beliebiger Punkt seiner Ebene, so liesse sich die Aufgabe: »durch M auf C_2 das Normalenquadrupel zu fällen,« zurückführen auf die Aufsuchung der Schnittpunkte einer Curve $\mathfrak{C}_4$ vierter Ordnung mit der mit B_1B_2 zusammenfallenden Axe YY

Die Curve $\mathfrak{C}_4$ ist der geometrische Ort der Schnittpunkte zweier einander entsprechenden Strahlen zweier Strahlenbüschel, deren Centra F_1 (oder F_2) und M sind, und die einander derart zugeordnet werden, dass jedem der beiden Strahlen des

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Büschels F_1 mit dem Einfallswinkel α jeder der beiden Strahlen des Büschels M mit dem Brechungswinkel β entspricht, wenn die Proportion

$$\sin \alpha : \sin \beta = a \quad c \qquad \ldots 3)$$

aufrecht bleibt.

Es bildet mithin die Curve $\mathfrak{C}_4$ die Ordnungscurve der beiden Büschel F_1 und M, die mit einander in einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft stehen. Es liesse sich leicht nachweisen, dass von den vier Schnittpunkten von $\mathfrak{C}_4$ mit YY mindestens Ein Paar reell ist. Die durch diese Schnittpunkte gehenden Strahlen des Büschels M sind die gesuchten Normalen.

§. 2.

Das Normalenproblem soll auf eine »Schaar confocaler Kegelschnitte« ausgedehnt werden.

Jedem Individuum einer solchen Schaar entspricht eine $\mathfrak{C}_4$, und die Gesammtheit aller $\mathfrak{C}_4$ bildet ein System von Curven vierter Ordnung vom Index Eins, da durch jeden von F_1 und M verschiedenen Punkt der Ebene laut 1) m und ferner laut 2) a und, weil c constant ist, Eine C_2 und mit dieser Eine $\mathfrak{C}_4$ bestimmt ist, die durch diesen Punkt hindurchgeht.

Ein näheres Eingehen auf die Untersuchung dieses Curvensystems ist für unsere Zwecke überflüssig, da sich letzteres in seiner Urgestalt weder für eine constructive noch rechnerische Behandlung unseres Problems geeignet zeigt.

Durch eine einfache Transformation wird es gelingen, jede $\mathfrak{C}_4$ durch einen Kreis K und das Curvensystem $\mathfrak{C}_4$ durch ein Kreisbüschel (K) mit imaginären Basispunkten zu ersetzen. Die Gerade YY, als Träger einer Punktreihe aufgefasst, übergeht in eine äusserst leicht zu construirende Hyperbel $\mathfrak{H}$, so dass deren Schnittpunkte mit den einzelnen Kreisen von (K) die Normalen für jeden entsprechenden Kegelschnitt der confocalen Kegelschnittschaar bestimmen.

Sei O der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 1), dessen X-Axe mit den Haupt-, dessen Y-Axe mit den Nebenaxen sämmtlicher Kegelschnitte C_2 der Schaar (C_2) zusammenfalle. Die durch F_1 gehende Ordinate und die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

durch M gezogene Abscisse schneiden sich in einem Punkte, der fortan mit J bezeichnet werden soll. Lassen wir das Strahlenbüschel M unverändert, verschieben aber das Strahlenbüschel F_1 derart, dass das Centrum F_1 nach J gelange und die einzelnen Strahlen des Büschels ihre ursprüngliche Lage beibehalten, so soll dieses durch Parallelverschiebung des Büschels F_1 entstandene Büschel J mit dem Büschel M in dieselbe Verwandtschaft treten, wie es bei dem ursprünglichen Büschel F_1 der Fall war. — Hiemit bleiben die in §. 1 aufgestellten Relationen 1), 2), 3) auch hier in Geltung.

Sei P ein Punkt der Ordnungscurve, in der sich zwei einander entsprechende Strahlen der Büschel J und M schneiden, werden ferner die Strecken JP und MP mit ρ_1 und ρ_2, der Normalabstand des Punktes P von JM mit PQ bezeichnet, während die Winkel α und β die in §. 1) erörterte Bedeutung beibehalten, so folgt $PQ = \rho_1 \sin \alpha = \rho_2 \sin \beta$, und hieraus

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = m = \frac{a}{c} \qquad .4)$$

Der Punkt P bewegt sich mithin auf der Ordnungscurve derart, dass das Verhältniss seiner Abstände von den beiden festen Punkten J und M den constanten Werth m beibehält.

Die Ordnungscurve, die durch die Schnitte zweier einander entsprechenden Strahlen der beiden Büschel J und M entsteht, ist somit ein Kreis K, dessen Mittelpunkt auf JM liegt und JM in zwei Punkten H und G schneidet, welche durch die Punkte J und M harmonisch getrennt erscheinen.

$$\frac{JG}{MG} = -\frac{JH}{MH} = m = \frac{a}{c} \qquad .5)$$

Trägt man von J auf der hindurchgehenden Ordinate nach beiden Seiten die Strecke $JD = JE = a$, von M auf der hindurchgehenden Ordinate aber die Strecke $MN = c$ auf, so schneiden DN und EN die Gerade JM in dem Punktpaare G und H, welches einen Durchmesser des gesuchten Ordnungskreises K begrenzt, letzteren somit bestimmt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Auf Grundlage der Relation 5) lassen sich alle weiteren mit K in einem Zusammenhange stehenden Strecken leicht ausdrücken.

Sei μ der Mittelpunkt, r der Radius des Kreises K, a wieder die Haupt-Halbaxe, c die Excentricität des Kegelschnittes C_2, seien endlich x und y die Ordinaten von M, so folgt:

$$JH = \frac{(c+x)m}{m+1} \qquad .6)$$

$$JG = \frac{(c+x)m}{m-1} \qquad .7)$$

$$\mu J = \frac{(c+x)m^2}{m^2-1} \qquad .8)$$

$$MH = -\frac{(c+x)}{m+1} \qquad 9)$$

$$MG = \frac{(c+x)}{m-1} \qquad 10)$$

$$\mu M = \frac{(c+x)}{m^2-1} \qquad 11)$$

$$\frac{\mu J}{\mu M} = m^2 \qquad 12)$$

$$r = \frac{(c+x)m}{m^2-1} \qquad 13)$$

Hiemit ist klar, dass und wie sich ein Kegelschnitt C_2 durch einen Kreis K ersetzen lässt.

Lassen wir nun die Brennpunkte als solche und somit c unverändert und variiren die Haupt-Halbaxe a, so entspricht jedem a ein Kegelschnitt C_2, jedem C_2 ein Kreis K. Der Gesammtheit aller C_2 — »der Schaar (C_2) confocaler Kegelschnitte« — entspricht die Gesammtheit der Kreise K — »das Kreisbüschel (K)« mit imaginären Basispunkten, mit J und M als Grenzpunkten oder Nullkreisen, mit der die Strecke JM in ω normal halbirenden Radicalaxe RR und mit dem über dem Durchmesser JM beschriebenen Orthogonalkreise.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der Zusammenhang zwischen den einzelnen einander entsprechenden C_2 und K wird aus der Figur 1) (in welcher wir nur $JD = JE = a$ zu variiren haben) und aus den Formeln 6). 13) ersichtlich.

Vor Allem ist klar, dass die Radicalaxe RR die Kreise des Büschels (K) in zwei Gruppen scheidet, von denen die eine, $a > c$ angenommen, alle Kreise umfasst, die den sämmtlichen Ellipsen der Schaar (C_2) entsprechen. Diese Kreise liegen mit M auf derselben Seite der Radicalaxe und enthalten, $a = \infty$ vorausgesetzt, den Nullkreis M als einen Grenzfall, dem als specieller Fall der Ellipse ein Kreis mit dem Radius »unendlich« und dem Centrum O entspricht.

Nimmt a ab, so wächst r, bis es für $a = c$ den Werth unendlich erreicht. — Für diesen Grenzfall übergeht C_2 in die von den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 begrenzte, endliche oder unendliche Strecke, die im ersten Falle als Specialität einer Ellipse, im anderen Falle als Specialität einer Hyperbel aufzufassen ist und somit den Übergang von der Ellipsen- zur Hyperbelgruppe vermittelt.

Diesem Grenzfall entspricht in dem Kreisbüschel (K) die Radicalaxe als Kreis K vom Radius »unendlich« in Verbindung mit der unendlich fernen Geraden G_∞.

Nimmt a noch weiter ab, $a < c$, so springt der Mittelpunkt μ des entsprechenden Kreises auf die andere Seite von RR. — Wir gelangen zu jener Kreisgruppe im Büschel (K), die den »sämmtlichen Hyperbeln der Schaar (C_2)« entsprechen und mit J und F_1 auf derselben Seite von RR liegen.

Mit a, der reellen Halbaxe der Hyperbel, nimmt r ab, μ nähert sich J, bis endlich für $a = o$ der Kegelschnitt C_2 in die als Specialität einer Hyperbel anzusehende, zweifach zu nehmende Gerade YY und der entsprechende Kreis K in den Nullkreis J übergeht.

Hiemit ist die Kette, die einerseits die reellen Kegelschnitte der Schaar (C_2), anderseits die entsprechenden Kreise des Büschels (K) unter einander bilden, beiderseits geschlossen.

§. 3.

Es ist am Schlusse des §. 1 darauf hingewiesen worden, dass die vier Schnittpunkte der Curve $\mathfrak{C}_4$ mit der Geraden YY

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jene vier Strahlen des Strahlenbüschels M bestimmen, welche die durch M auf C_2 gefällten Normalen repräsentiren. Nachdem wir jede Curve $\mathfrak{C}_4$ durch einen Kreis K des Büschels (K) ersetzt haben, erübrigt uns noch, das Transformationsgebilde der Geraden YY, die als Träger einer mit den beiden Strahlenbüscheln F_1 und M perspectivisch gelegenen Punktreihe anzusehen ist, zu untersuchen.

Diese beiden Strahlenbüschel F_1 und M haben YY zur Ordnungslinie, sie stehen zu einander in einer ein-eindeutigen Verwandtschaft, sie haben mit den in §. 1) und 2) besprochenen Strahlenbüscheln F_1 und M nur die Mittelpunkte F_1 und M gemein, sie sollen daher, um Verwechslungen zu vermeiden, vorläufig mit $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden.

Bleibe das Strahlenbüschel $\mathfrak{M}$ unverändert und werde das Strahlenbüschel $\mathfrak{F}_1$ parallel zu sich selbst derart verschoben, dass sein Mittelpunkt wieder nach J zu liegen kommt und dieses so verschobene Büschel $\mathfrak{F}_1$ mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet, so sind die Büschel $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$ zu einander projectivisch. Um zu einem Strahle von $\mathfrak{M}$ den zugeordneten Strahl von $\mathfrak{J}$ zu finden, hat man den ersteren mit YY zu schneiden, den Schnittpunkt mit F_1 zu verbinden und durch J den zu dieser Verbindungsgeraden parallelen Strahl von $\mathfrak{J}$ zu verzeichnen.

Das Erzeugniss der projectivischen Strahlenbüschel $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$ (Fig. 1), d. i. die Gesammtheit aller Schnittpunkte von je einem Paare einander entsprechender Strahlen beider Büschel, bildet eine Hyperbel $\mathfrak{H}$, die durch J und M hindurchgeht, YY, die Nebenaxe der confocalen Kegelschnittschaar (C_2) zur Asymptote hat.

Die Richtung der anderen Asymptote bestimmt der Strahl F_1M. Ist MJ eine Diagonale eines Parallelogrammes MF_1JW, dessen Seiten paarweise parallel sind zu je einer der beiden Asymptoten, so liegt der Mittelpunkt C der Hyperbel $\mathfrak{H}$ auf der anderen Diagonale F_1W, somit im Schnittpunkt derselben mit der Asymptote YY — Die durch C zu MF_1 gezogene Parallele, welche FY in T, XX in L schneidet, ist somit die andere Asymptote von $\mathfrak{H}$. — Sei S der Schnittpunkt von F_1M mit YY, so folgt aus der Ähnlichkeit und Lage der Parallelogramme

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

F_1TCS und F_1JWM der Parallelismus und die Gleichheit der Strecken ST und $OF_1 = c$ und F_1L. Es ist

$$\left.\begin{aligned} F_1L &= c \\ OL &= 2c \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

wodurch L und die durch L parallel zu F_1M zu ziehende zweite Asymptote bestimmt ist.

Nebenbei sei hingewiesen, dass der durch den Brennpunkt F_2 gehende Strahl des Strahlenbüschels $\mathfrak{M}$ die im §. 2 erörterte Radicalaxe RR in einem Punkte V der Hyperbel $\mathfrak{H}$ schneidet. Die Construction weiterer Punkte und Tangenten von $\mathfrak{H}$, namentlich der durch J und M hindurchgehenden, ist selbstverständlich.

Der Gesammtheit aller Punkte M der Ebene der Kegelschnittschaar entspricht ein hyperbolisches Netz, allen auf einem und demselben durch F_1 oder F_2 gehenden Leitstrahl gelegenen Punkten entspricht ein Büschel concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Hyperbeln.

Für alle Punkte M der Hauptaxe übergeht die Hyperbel $\mathfrak{H}$ in die beiden Axen XX und YY, — für alle Punkte M der Nebenaxe in zwei Gerade, wovon die eine mit YY zusammenfällt, die andere durch L parallel zu F_1M geht. Nur wenn M auf einer der beiden Axen XX und YY der confocalen Kegelschnittschaar liegt, degenerirt $\mathfrak{H}$ in zwei Gerade, wovon die eine mit YY zusammenfällt, die andere durch L parallel zum Leitstrahl F_1M hindurchgeht.

§. 4.

Übergehen wir nun zur endgiltigen Lösung des Normalenproblems einer durch ihr Brennpunktspaar charakterisirten »confocalen Kegelschnittschaar (C_2)« in Bezug auf einen gegebenen Punkt M. (Fig. 1.)

Ersetzen wir auf die in §. 2 erörterte Weise die Schaar (C_2) durch das Kreisbüschel (K), und verzeichnen für den Punkt M die Hyperbel $\mathfrak{H}$, so wird jeder Kreis K des Büschels (K) $\mathfrak{H}$ in vier Punkten schneiden, von denen wenigstens Ein Paar

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

reell sein muss. Dies folgt daraus, weil die Grenzpunkte des Büschels (K), J und M, zugleich Punkte von $\mathfrak{H}$ sind und durch die Schnittpunkte G und H eines jeden der Kreise von (K) mit der Geraden JM harmonisch getrennt erscheinen, infolge dessen immer einer der Punkte G und H inner- oder ausserhalb der Hyperbel $\mathfrak{H}$ liegen muss, so dass jeder über dem Durchmesser GH beschriebene Kreis K die Hyperbel $\mathfrak{H}$ wenigstens in Einem Paar reeller Punkte schneidet. Das andere Paar von Schnittpunkten kann reell, zusammenfallend oder imaginär sein.

Jeder durch einen solchen Schnittpunkt gehende Strahl des Strahlenbüschels M ist eine Normale n auf dem dem K in der Schaar (C_2) entsprechenden Kegelschnitte C_2.

Ohne dass es nöthig wäre, den Kegelschnitt C_2 zu zeichnen, findet man den Fusspunkt Φ der Normale n folgendermassen: Man verlängert die durch den Schnittpunkt 1 von $\mathfrak{H}$ und K gehende Normale $M1$ oder n, bis sie YY in I schneidet, verbindet I mit F_1, errichtet in F_1 zu IF_1 das Perpendikel, welches YY in I' trifft. — Wird durch I' auf n die Senkrechte gefällt, so ist selbe eine Tangente an C_2 und ihr Fusspunkt Φ deren Berührungspunkt, zugleich der Fusspunkt der Normalen n.

Wir ersehen, dass durch jeden Punkt M auf jeden Kegelschnitt C_2 4 Normalen, von denen wenigstens Ein Paar reell ist, gefällt werden können. Wird K von $\mathfrak{H}$ berührt, so ergibt sich eine Doppelnormale, welche entweder das Paar reeller Normalen ersetzt oder zu dem Paare derselben hinzukommt. Ersteres tritt ein, wenn K in die Nullkreise M oder J übergeht, letzteres, wenn K einen Hyperbelast in zwei Punkten schneidet, den anderen berührt.

Für M als Nullkreis wird die in M an $\mathfrak{H}$ errichtete Tangente, welche, wie aus dem Bildungsgesetze von $\mathfrak{H}$ ersichtlich, durch O hindurchgeht, — die Doppelnormale, — der entsprechende Kegelschnitt ist der aus O als Centrum mit dem Radius »unendlich« beschriebene Kreis. — Für J als Nullkreis wird die Doppelnormale MJ, der entsprechende Kegelschnitt ist die als Specialität einer Hyperbel anzusehende zweifach zu nehmende Gerade YY

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Übergeht K in die Radicalaxe RR und G_∞, — C_2 somit in die von F_1 und F_2 begrenzte endliche oder unendliche Strecke, so sind zwei der durch M gehenden Normalen parallel zu je einer der Asymptoten, also die eine durch F_1 hindurchgehend, die andere MZ normal zu XX. — Die beiden anderen Normalen verbinden M mit den Schnittpunkten von $\mathfrak{H}$ mit RR, davon geht die eine MV durch den Punkt F_2, während die andere mit MZ zusammenfällt, so dass MZ als Doppelnormale auftritt.

Die Zeichnung einer einzigen Hyperbel $\mathfrak{H}$ langt hin, um das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschaar in Bezug auf einen Punkt M graphisch zu lösen. — Erwägen wir aber, dass, wie am Schlusse des §. 3 erwähnt wurde, allen auf einem und demselben Leitstrahl (der durch einen der Brennpunkte geht) gelegenen Punkten M ein Büschel concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Hyperbeln entspricht, so ist leicht einzusehen, wie durch eine entsprechende Vergrösserung oder Verkleinerung des Kreisbüschels (K) dieselbe Hyperbel $\mathfrak{H}$ zur Lösung des Normalenproblems für alle auf demselben Leitstrahl F_1M oder F_2M gelegenen Punkte verwendet werden könnte.

Dadurch erscheint der erste Theil unserer Aufgabe erledigt.

§. 5.

Es wurde am Schlusse des §. 3 nachgewiesen, dass für alle Punkte M der beiden Axen XX und YY der Kegelschnittschaar (C_2) die Hyperbel $\mathfrak{H}$ in zwei Gerade, das Normalenproblem somit in zwei quadratische Probleme degenerirt. Eingangs wurde auf die Pelz'schen Diameter und die Lauermann'schen Kreise hingewiesen, für deren Punkte dasselbe eintritt. Auf Grundlage des Behandelten soll die Existenz zweier anderen Degenerirungs-Curven dritter Ordnung nachgewiesen, ihre Gleichung aufgestellt, ihre Construction gelehrt werden.

Es ist einleuchtend, dass das Normalenproblem mittelst Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann — also in zwei quadratische Probleme zerfällt — wenn der Mittelpunkt μ des den Kegelschnitt C_2 stellvertretenden

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Kreises K auf einer der beiden Axen der Hyperbel $\mathfrak{H}$, d. h. auf einer der beiden Winkelhalbirenden der beiden Asymptoten der letzteren liegt.

Wir haben zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintritt. Die Einkleidung dieser Bedingungen in einen mathematischen Ausdruck führt uns zur Gleichung der gesuchten Degenerirungscurve.

Zur Erklärung mögen die Fig. 2*a* und 2*b* dienen, in denen die analogen Punkte gleich bezeichnet werden sollen.

In Fig. 2*a* liege μ auf der Winkelhalbirenden des stumpfen, in Fig. 2*b* auf jener des spitzen Winkels, den die Asymptoten YY und LC einschliessen.

Sind X und Y die Ordinatenaxen, x und y die Ordinaten von M, U und V die Projectionen von M auf XX und YY, ist W der Schnittpunkt von MJ mit der Asymptote LC, und behalten die anderen Buchstaben die ursprüngliche Bedeutung, so sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, beide Fälle, wie sie in Fig. 2*a* und Fig. 2*b* getrennt angedeutet sind, gemeinsam behandelt und etwaige Verschiedenheiten im Laufe der Rechnung durch ein doppeltes Vorzeichen (von welchen sich das obere auf Fig. 2*a*, das untere auf Fig. 2*b* beziehen soll), auseinander gehalten werden.

Wegen des Parallelismus der Geraden F_1M und LC ist $MW = c$, $VW = c - x$. Im Dreieck VCW wird der Aussen-, bezüglich der Innenwinkel C durch die Winkelhalbirende $C\mu$ halbirt, welche VW, bezüglich deren Verlängerung in μ schneidet. Hieraus und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke VCW und UMF_1 folgt:

$$\mu V \;\; \mu W = VC : WC = UM \;\; F_1M = \pm y \;\; \sqrt{y^2 + (c+x)^2}$$

$$\mu V \;\; (\mu W \mp \mu V) = \pm y \;\; (\sqrt{y^2 + (c+x)^2} - y)$$

Da die absolute Strecke $\mu W \mp \mu V$ gleich ist $VW = c - x$, so folgt

$$\mu V = \pm \frac{y(c-x)}{\sqrt{y^2 + (c+x)^2} - y}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nun ist

$$\mu M = \pm(\mu V - MV) = \pm\left(\pm\frac{y(c-x)}{\sqrt{y^2+(c+x)^2}-y} \mp x\right),$$

$$\mu M = \frac{y(c-x)}{\sqrt{y^2+(c+x)^2}-y} - x$$

und hieraus:

$$\mu M = \frac{cy - x\sqrt{y^2+(c+x)^2}}{\sqrt{y^2+(c+x)^2}-y} \qquad 14)$$

Wir ersehen, dass die beiden in Fig. 2 *a* und 2 *b* getrennt behandelten Fälle denselben Ausdruck 14) liefern.

Beachten wir ferner, dass μ der Mittelpunkt eines einem Kreisbüschel mit den Grenzpunkten M und J gehörigen Kreises K sein müsse, dass somit für μM der Ausdruck 11) in §. 2 gilt, in welchen für m die Identität 5) $m = \frac{a}{c}$ eingeführt werden soll, so dass

$$\mu M = \frac{c+x}{\frac{a^2}{c^2}-1} = \frac{c^2}{a^2-c^2}(c+x) \qquad 11'$$

wird.

Durch Gleichsetzung der rechtsseitigen Werthe von 11′) und 14) gelangen wir schliesslich zur Gleichung der gesuchten Degenerirungscurve.

Es ist

$$\frac{cy - x\sqrt{y^2+(c+x)^2}}{\sqrt{y^2+(c+x)^2}-y} = \frac{c^2}{a^2-c^2}(c+x),$$

woraus nach einer einfachen Umformung

$$y^2 = \left(\frac{c+x}{c-x}\right)\frac{(a^2x+c^3)^2}{(a^4-c^4)} \qquad 15)$$

die gesuchte Gleichung der Degenerirungscurve folgt.

Wir ersehen vor Allem, dass diese Degenerirungscurve eine in Bezug auf die X-Axe symmetrische Unicursalcurve dritter Ordnung mit dem auf der X-Axe liegenden,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

vom Mittelpunkte O um den Abstand $O\Delta = -\frac{c^3}{a^2}$ entfernten Doppelpunkte Δ ist, welche einerseits in F_1 von einer zur XX-Axe normalen Tangente berührt und begrenzt wird, zwischen dieser Tangente und Δ eine Schleife bildend, während sie anderseits der in F_2 zur XX-Axe errichteten Normale asymptotisch zueilt, im unendlich fernen Punkte dieser Normalen und Asymptote einen Flexionspunkt mit dieser Asymptote als Flexionstangente bildend.

Wird F_1 mit F_2 vertauscht, so erhält man eine zweite zu der ersteren in Bezug auf die YY-Axe symmetrische Degenerirungscurve, deren Gleichung

$$y^2 = \left(\frac{c-x}{c+x}\right)\frac{(c^3-a^2x)^2}{(a^4-c^4)}$$

lautet.

Beide Degenerirungscurven lassen sich somit durch die Doppelgleichung ausdrücken:

$$y^2 = \left(\frac{c\pm x}{c\mp x}\right)\frac{(c^3\pm a^2x)^2}{(a^4-c^4)}. \qquad 15')$$

Wegen der Symmetrie beider Degenerirungscurven wird es hinreichen, nur Eine von beiden einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen.

§. 6.

α) Die Degenerirungscurve der Ellipse.

In diesem Falle ist (wegen $a > c$) $a^4 - c^4 = b^2d^2$ positiv, b die kleine Axe, d die Hypotenuse eines über den Katheten a und c errichteten rechtwinkligen Dreieckes. In

$$\nu = \pm\sqrt{\frac{c+x}{c-x}}\left(\frac{a^2x+c^3}{bd}\right)$$

die Ordinate η einer der Hilfsgeraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ mit der Gleichung

$$\eta = \pm\left(\frac{a^2x+c^3}{bd}\right) \qquad 16)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

eingeführt, gibt

$$y = \eta \sqrt{\frac{c+x}{c-x}} = \eta \frac{(c+x)}{\sqrt{c^2-x^2}} = \eta \frac{\sqrt{c^2-x^2}}{c-x} \qquad 17)$$

Sei ferner α ein Hilfswinkel, bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{c+x}{c-x}}, \qquad 18)$$

so übergeht 15) in

$$y = \pm \eta \operatorname{tg} \alpha, \qquad 19)$$

aus welcher Gleichung eine geeignete Construction der Degenerirungscurve folgt.

In Fig. 3 ist A_1A_2 die grosse, B_1B_2 die Nebenaxe; über der vom Brennpunktspaar F_1F_2 begrenzten Strecke als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben. Eine oder beide der Hilfsgeraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$, welche die X-Axe in Δ treffen und mit derselben den Winkel $\varphi = \operatorname{Arc\,tg} \frac{a^2}{bd}$ einschliessen, werden verzeichnet. (In Fig. 3 ist $F_1\mathfrak{A} \| \mathfrak{C}\mathfrak{B} \| YY$, $\mathfrak{C}\Delta \| \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, ferner

$$\mathfrak{E}\mathfrak{J} \| B_2A_2, \; OL = O\mathfrak{K} = d, \; \mathfrak{G}\mathfrak{G} \perp L\mathfrak{J}).$$

Die Curve breitet sich nur innerhalb des von den Ordinaten in den beiden Brennpunkten begrenzten Flächenstreifens aus. Nehme man nun eine Ordinate an, die die X-Axe in $\mathfrak{p}$, den Kreis in $\mathfrak{P}$, eine der beiden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ in π trifft, — so ist $O\mathfrak{p} = x$, $\pi\mathfrak{p} = \eta$ und $\sphericalangle\, NF_1\mathfrak{P} = \alpha$, — wo NF_1 die in F_1 errichtete Ordinate bedeutet.

Wird durch π eine Parallele zur X-Axe gezogen, so ist das von F_1N in $\mathfrak{q}$ und von $F_1\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ begrenzte Stück dieser Parallelen gleich y, welches somit, von $\mathfrak{p}$ aus auf der hindurchgehenden Ordinate nach beiden Seiten aufgetragen, die Curvenpunkte P_1 und P_2 gibt, wodurch ein Entstehungsgesetz unserer Degenerirungscurve gegeben ist.

Ein anderes Entstehungsgesetz und eine andere Construction ergeben sich aus der bereits eingangs hervorgehobenen Verwandtschaft der Degenerirungscurve mit der Queteletischen »focale à noeud«. Bekanntlich entsteht letztere durch Verbindung der Punkte, welche sich als Schnitte

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

aller einander in einem und demselben Punkte berührenden, ein Büschel bildenden Kreise mit ihren durch einen Fixpunkt gehenden Diametern ergeben. Sei (Fig. 4) F_1 dieser Fixpunkt, O der gemeinsame Berührungspunkt, XX die gemeinsame Berührungstangente aller Kreise, ω der Mittelpunkt eines derselben, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ die auf demselben liegenden Punkte der »Focale«, $\mathfrak{y}$ und x ihre laufenden Coordinaten.

Die Gleichung der »Focale« ist dann

$$\mathfrak{y} = \pm \sqrt{\frac{c+x}{c-x}}\, x. \qquad .20)$$

Die Werthe aus 20) und 16) in 15) eingesetzt, geben die für eine Construction unserer Degenerirungscurve wichtige Proportion:

$$y \;\; \mathfrak{y} = \eta \;\; x. \qquad .21)$$

Ist $\mathfrak{P}_1$ ein Punkt der Focale, schneidet seine Ordinate die X-Axe in $\mathfrak{p}$, die $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ in π, wird auf XX ein Punkt π_1 verzeichnet, so dass $\mathfrak{p}\pi_1 = \mathfrak{p}\pi = \eta$ wird, so schneidet die durch π_1 zur $O\mathfrak{P}_1$ gezogene Parallele $\pi_1 P_1$ die Ordinate in $\mathfrak{p}$ in einem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Degenerirungscurve.

Aus 15) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a(c^2-x^2)+c(a^2x+c^3)}{bd(c-x)\sqrt{c^2-x^2}} \qquad .22)$$

und speciell für $x = \frac{c^3}{a^2}$ die Richtungsconstanten der beiden im Doppelpunkte Δ errichteten (in Fig. 4 weggelassenen) Tangenten ΔT_1, ΔT_2, welche mit der X-Axe den Winkel γ einschliessen:

$$\operatorname{tg}\gamma = \pm\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}\right) = \pm\frac{a^2}{d^2} \qquad .22')$$

Wir erhalten übrigens dieselben Werthe unmittelbar, wenn wir (Fig. 5), wie es in Fig. 3 gezeigt wurde, einen Punkt P der Degenerirungscurve bestimmen, indem wir einem $x = O\mathfrak{p}$ das entsprechende $y = \mathfrak{q}\mathfrak{Q}$ zuordnen.

Wird x um ein unendlich Kleines $dx = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ vergrössert, so wird π nach π', P nach P' verschoben, der Strahl FP um den

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Winkel $d\alpha = PF_1P'$ gedreht, so dass also der Centriwinkel POP, gleich $2d\alpha$, der Bogen $PP_1 = 2cd\alpha$, $dx = PP_1 \sin 2\alpha$ wird.

Somit ist

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2c \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha . \cos \alpha. \qquad .23)$$

Dabei übergeht $y = \mathfrak{q}\mathfrak{Q}$ in $y + dy = \mathfrak{q}'\mathfrak{Q}'$, so dass $dy = \mathfrak{R}\mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}\mathfrak{R}' + \mathfrak{R}'\mathfrak{Q}'$ wird. Wir ersehen hieraus, dass dy aus zwei Summanten besteht, deren erster $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}''$ den Einfluss der Horizontalverschiebung des Punktes π nach π'', — deren zweiter $\mathfrak{R}'\mathfrak{Q}'$ den Einfluss der Verticalverschiebung des Punktes π'' nach π' darstellt. Es ist, $\mathfrak{Q}\mathfrak{K}$ als das aus F_1 als Centrum mit dem Radius $F_1\mathfrak{Q} = \eta \sec \alpha$ beschriebene Bogenelement vorausgesetzt, — $\mathfrak{Q}\mathfrak{K} = \eta \sec \alpha . d\alpha$, —

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}\mathfrak{K} \sec \alpha = \eta \sec^2 d\alpha = \left(\frac{a^2x + c^3}{bd}\right) \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad ...24)$$

Aus dem Dreieck $\mathfrak{R}'\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ folgt:

$$\mathfrak{R}'\mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}'\mathfrak{Q}'' \operatorname{tg} \alpha = d\eta . \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{bd} \operatorname{tg} \alpha . dx,$$

$$\mathfrak{R}'\mathfrak{Q}' = \frac{a^2}{bd} \operatorname{tg} \alpha . 2c \sin 2\alpha . d\alpha = 4 \frac{a^2}{bd} \sin^2 \alpha . d\alpha \qquad .25)$$

und hieraus:

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{bd} \left\{ \frac{(a^2x + c^3)}{\cos^2 \alpha} + 4a^2c \sin^2 \alpha \right\} \qquad .26)$$

Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)} = \frac{(a^2x + c^3) + 4a^2c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4bcd \sin \alpha \cos^3 \alpha}.$$

Wird hierin laut 18) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{c+x}{c-x}}$, somit $\sin \alpha = \sqrt{\frac{c+x}{2c}}$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{c-x}{2c}}$ eingesetzt, so resultirt unmittelbar die Gleichung 22).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

In Fig. 6 ergibt sich durch analoge Schlüsse eine Construction des Tangentenpaares im Doppelpunkte Δ. Wird daselbst die Ordinate errichtet, die in E den über F_1F_2 verzeichneten Kreis schneidet, wird durch E die zur X-Axe Parallele gezogen, welche $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ in J schneidet, durch J die Ordinate Ji verzeichnet, und auf Ji von deren Fusspunkte i aus beiderseits die Strecke $iK_1 = iK_2 = F_1\Delta$ aufgetragen, so sind ΔT_1 und ΔT_2 die durch K_1, K_2 gehenden gesuchten Doppelpunktstangenten. Über den Verlauf und die Form der Degenerirungscurve gibt Fig. 6 Aufschluss.

β. Die Degenerirungscurve der Hyperbel (Fig. 7).

Wegen $c > a$, soll die Gleichung 15) auf die Form

$$y = \pm\sqrt{\frac{x+c}{x-c}}\,\frac{c^3+a^2x}{\sqrt{c^4-a^4}} = \pm\sqrt{\frac{x+c}{x-c}}\,\frac{(a^2x+c^3)}{bd} \quad \ldots 23)$$

gebracht werden, worin b und d die imaginäre Axe und die Hypotenuse eines über den Katheten a und c errichteten rechtwinkligen Dreiecks bedeuten.

Führen wir, wie bei der Ellipse, eine Hilfsgerade $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ mit der Gleichung

$$\eta = \pm\left(\frac{a^2x+c^3}{bd}\right)$$

ein, so übergeht 23) in

$$y = \eta\sqrt{\frac{x+c}{x-c}} \quad .24)$$

Durch Differentiation oder eine unmittelbare, dem Falle α) analoge Untersuchung erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{a^2(x^2-c^2)-c(a^2x+c^3)}{bd(x-c)\sqrt{x^2-c^2}} \quad .25)$$

Wir ersehen, dass x numerisch grösser als c sein müsse, dass somit die Curve sich nur ausserhalb des von den Ordinaten in den beiden Brennpunkten begrenzten Flächenstreifens ins Unendliche ausbreiten könne.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Sowohl $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ als auch die Degenerirungscurve schneiden die X-Axe im Doppelpunkte Δ, $O\Delta = -\frac{c^3}{a^2}$, numerisch grösser als c. (In Fig. 7 wurde $O\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ verlängert, daselbst zu $O\mathfrak{B}$ das Perpendikel $\mathfrak{B}\Delta$ verzeichnet, hiemit Δ bestimmt. — Ferner wurde $O\mathfrak{B}_1 = OA_2 = a$ gemacht, durch $\mathfrak{B}_1$ parallel zu B_2A_2 die Gerade $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$ gezogen, $O\mathfrak{D} = O\mathfrak{J} = d$ und die eine der Geraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ normal zu $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ verzeichnet.)

Zwischen F_1 und Δ bildet die Curve eine Schleife. Die Richtungsconstanten der beiden Doppelpunktstangenten sind laut 25) gleich $\pm \frac{a^2}{d^2}$. (In Fig. 7 wurde $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ parallel zu $\mathfrak{D}A_2$ und normal zu $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ die eine der beiden Doppelpunktstangenten ΔT_2 errichtet.) — Über Δ hinaus verzweigt sich die Curve ins Unendliche, daselbst zwei Asymptoten berührend, $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}$, welche mit dem Paar der Hilfsgeraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ parallel sind und die X-Axe im Punkte Φ schneiden, der durch den Abstand $O\Phi = -\frac{c^2d^2}{a^2}$ oder noch einfacher durch den Abstand $\Delta\Phi = -c$ gegeben ist. — Im weiteren Verlaufe erscheint die Curve auf der anderen Seite der Asymptoten $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}$ und nähert sich asymptotisch der in F_2 errichteten Ordinate $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}$, die als dritte Asymptote und als Flexionstangente mit dem im Unendlichen liegenden Flexionspunkte auftritt.

Die Degenerirungscurve besteht somit aus drei unendlichen durch drei Asymptoten zusammenhängenden Ästen.

In Fig. 7 schneidet eine der Abscisse x gehörige Ordinate XX in $\mathfrak{p}$, eine der beiden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$. Wird von $\mathfrak{p}$ an den über dem Durchmesser F_1F_2 beschriebenen Kreis eine Tangente mit dem Berührungspunkt $\mathfrak{Q}$ gezogen, auf X von $\mathfrak{p}$ aus die Strecke $\mathfrak{p}Q = \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \sqrt{c^2 - x^2}$ aufgetragen, und durch Q zu $F_2\mathfrak{P}$ die Parallele QP_1 gezogen, so bestimmt deren Schnittpunkt P_1 mit der Ordinate in $\mathfrak{p}$ einen Punkt der Degenerirungscurve. Statt dessen kann auch durch F_1 zu $Q\mathfrak{P}$ die Parallele F_1P_1 verzeichnet werden, die ebenfalls P_1 bestimmt.

Der Verlauf der Degenerirungscurve ist aus Fig. 7 ersichtlich.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

γ. Die Degenerirungscurve der Parabel. (Fig. 8.)

Lassen wir die Ellipse (oder Hyperbel) in die Parabel übergehen, so übergeht die Degenerirungscurve der ersteren in jene der letzteren.

Gehen wir von der Ellipse aus, lassen die X-Axe unverändert, verschieben aber den Ursprung des rechtwinklig bleibenden Coordinatensystems nach F_1, so hat man in 15) x durch $x - c$ zu ersetzen. Wird zugleich $a = c + \frac{p}{2}$ eingeführt, worin p somit die doppelte Strecke A_1F_1 bedeutet, so übergeht 15) in

$$y^2 = \frac{x\left[\left(1+\frac{p}{2c}\right)^2 x - \left(1+\frac{p}{4c}\right)p\right]^2}{\left(2-\frac{x}{c}\right)\left(2p+\frac{3p^2}{2c}+\frac{p^3}{2c^2}+\frac{p^4}{16c^3}\right)}$$

Beim Übergang zur Parabel wird c unendlich, p übergeht in den Parameter der Parabel und für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen X-Axe mit der Parabelaxe zusammenfällt (deren Sinn dadurch bestimmt erscheint, dass sich der Parabelscheitel A auf der negativen Seite befindet), und dessen Y-Axe durch den Parabelbrennpunkt F geht, erhalten wir als Gleichung unserer Curve:

$$y^2 = \frac{x(x-p)^2}{4p} \qquad .26)$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{4\sqrt{px}}(3x-p). \qquad .27)$$

Die Curve (Fig. 8) erstreckt sich von F aus, die in F errichtete Ordinate berührend, symmetrisch zur X-Axe nach der vom Scheitel A abgewandten Seite ins Unendliche, in Δ ($F\Delta = p$) einen Doppelpunkt mit den Doppelpunktstangenten ΔT_1 und ΔT_2 bildend, welche mit XX die Winkel $\gamma =$ Arc tg ($\pm$ 0·5) einschliessen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Gleichung einer dieser beiden Doppeltangenten ist

$$\eta = \frac{x-p}{2}, \qquad .28)$$

welche behufs der Construction der Curve zugleich als Hilfsgerade $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ aufzufassen ist, so dass 26) die Form

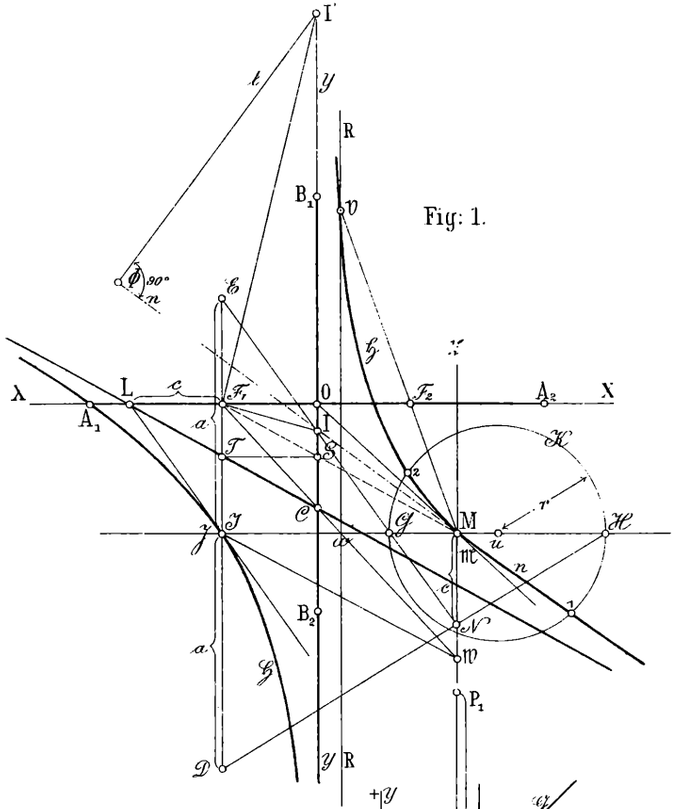
$$y = \pm \eta \sqrt{\frac{x}{p}} \qquad .28)$$

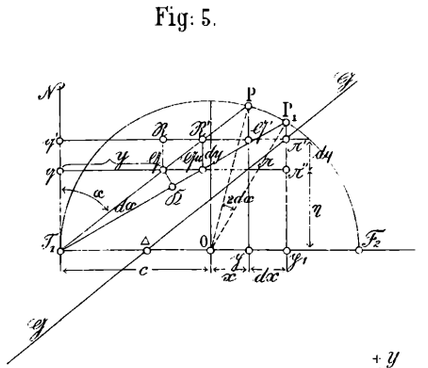
annimmt.

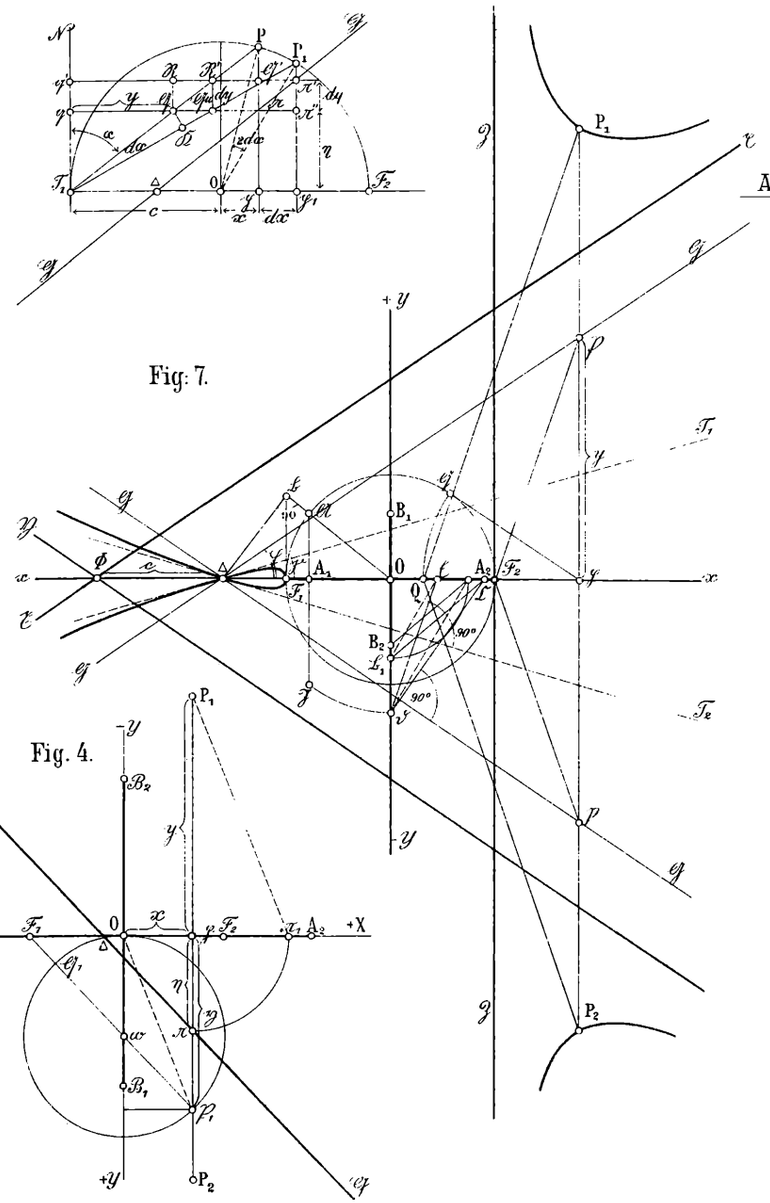
Hieraus resultirt in Fig. 8 die daselbst durchgeführte Construction zur Bestimmung der Punkte P_1 und P_2, deren Ordinaten y gleich $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ sind. Daselbst bedeutet D die Directrix, A den Scheitel, F den Brennpunkt der Parabel.

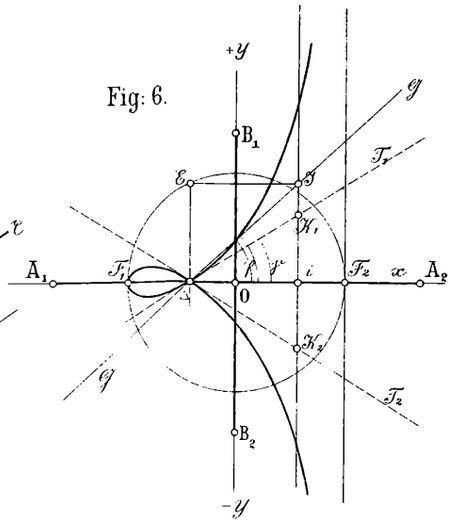
Sowohl die Construction als auch der Verlauf der Degenerirungscurve ist aus Fig. 8 ersichtlich.

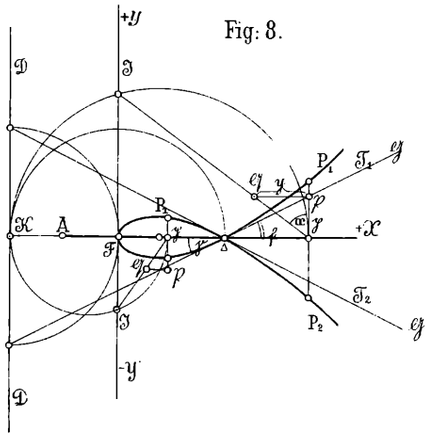
©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

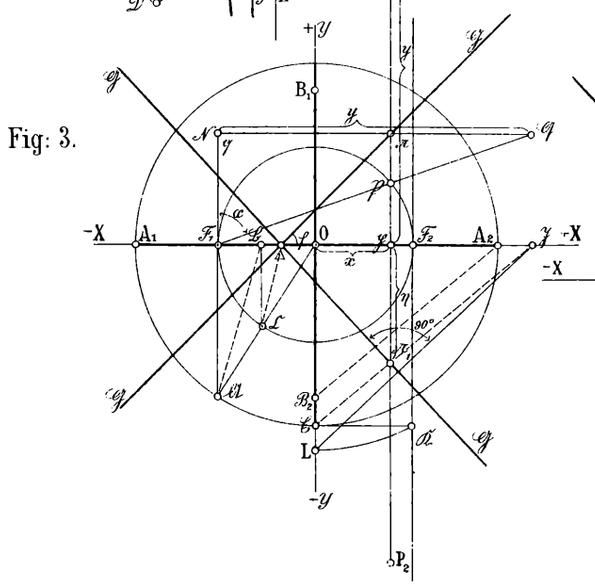


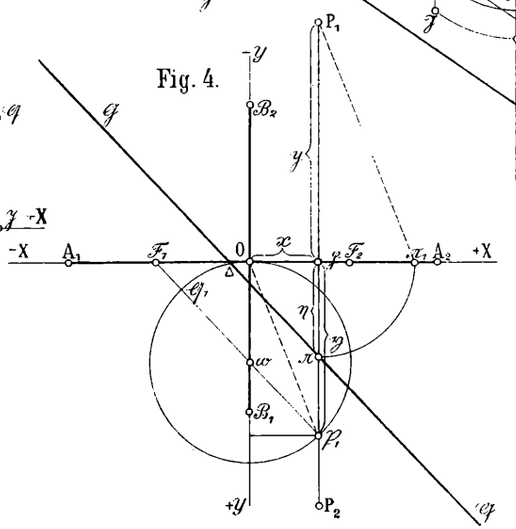


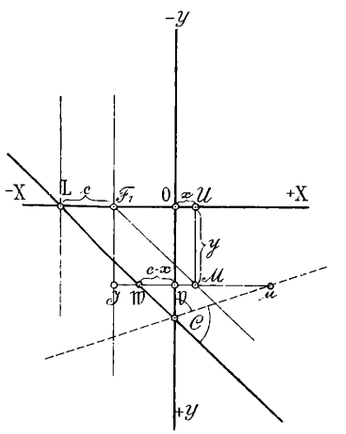


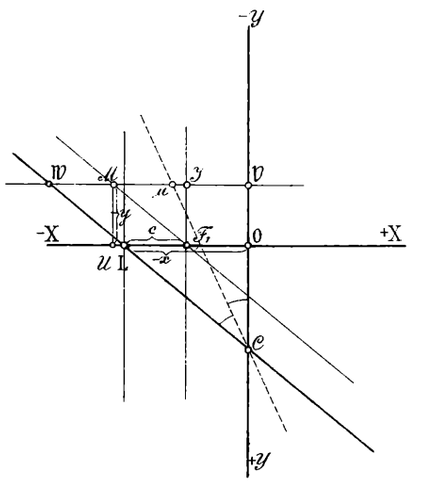












Lith. Anstalt v. J. Barth Vl. Wien

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): Tesar Josef

Artikel/Article: Über ein Paar unicursaler Degenerirungscurven dritter Ordnung des Normalenproblems und das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschaar. 1248-1268