©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die wechselseitige Induction zweier auf eine Kugelschale gleichmässig gewickelter Windungslagen

Oscar Singer.

Aus dem mathematisch-physikalischen Seminar der k. k. Universität in Wien.

In seiner Abhandlung: »Über Faraday's Kraftlinien« betrachtet Maxwell die Induction, welche ein auf eine Kugelfläche gleichmässig aufgewundener Draht auf einen zweiten, auf dieselbe Fläche gewundenen ausübt. In seiner Lösung wird angenommen,[1] dass die elektromotorische Kraft des primären Stromes momentan von der Intensität 0 bis zu einer endlichen Intensität ansteigt. Dasselbe wird dann auch für die Intensität des Inductionsstromes gezeigt. Da aber hiedurch auf den primären Stromkreis eine unendliche Inductionswirkung ausgeübt würde, so wird die Richtigkeit der Maxwell'schen Lösung zweifelhaft. Um dieselbe auf ihre Richtigkeit zu prüfen, wollen wir hier den Fall discutiren, dass die elektromotorische Kraft F des primären Stromes in einer endlichen, wenn auch sehr kurzen Zeit τ von 0 continuirlich bis zu einer constanten Intensität c ansteigt.

Die allgemeinen Gleichungen für die Induction zweier Stromkreise J und J' mit den Widerständen R und R', den Selbstinductionscoëfficienten A und B und dem wechselseitigen Inductionscoëfficienten C sind:

---

[1] Ostwald's Classiker, 69, S. 90.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$RJ + A\frac{dJ}{dt} + C\frac{dJ'}{dt} = F$$

$$R'J' + B\frac{dJ'}{dt} + C\frac{dJ}{dt} = 0,$$

wenn im primären Stromkreis J eine elektromotorische Kraft wirkt, von der wir voraussetzen, dass sie von $t = 0$ bis $t = \tau$ eine beliebige Function $F(t)$ der Zeit, für negative t aber $= 0$, für $t > \tau$ gleich einer Constanten c sei. Für die vorausgesetzte Art der Windung ist $A = Nn^2$, $B = Nn'^2$, $C = Nnn'$, wobei n und n' die Anzahl der Windungen des primären, respective secundären Stromkreises und N eine Constante bedeutet. Durch Elimination erhält man:

$$a\frac{dJ}{dt} + J = \frac{Nn'^2}{RR'}\frac{dF}{dt} + \frac{F}{R} = \varphi \qquad a = N\left(\frac{n^2}{R} + \frac{n'^2}{R'}\right)$$

$$J = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int \varphi e^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$J' = \frac{n'R}{nR'}J - \frac{n'}{nR'}F$$

$t = 0$ bis $t = \tau$:

$$J = J_1 = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\frac{Nn'^2}{RR'}\int\frac{dF}{dt}e^{\frac{t}{a}}\,dt + \frac{1}{aR}e^{-\frac{t}{a}}\int Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\frac{Nn'^2}{RR'}F + \frac{1}{aR}e^{-\frac{t}{a}}\left(1 - \frac{Nn'^2}{aR'}\right)\int Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{Nn^2}{aR}\right)F + \frac{Nn^2}{a^2R^2}e^{-\frac{t}{a}}\left(\int_t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right)$$

$$J' = J_1' = -\frac{n'}{nR'}\frac{Nn^2}{aR}F + \frac{n'}{nR'}\frac{Nn^2}{a^2R}e^{-\frac{t}{a}}\left(\int_t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right)$$

$$= -\frac{Nnn'}{aRR'}\left[F - \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\left(\int_t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right)\right]$$

$t = \tau$ bis $t = \infty$ ist $F = c$ $\varphi = \frac{c}{R'}$

$$J = J_2 = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\frac{c}{R}\int e^{\frac{t}{a}}\,dt = \frac{c}{R} + \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\frac{c}{R}C_2$$

$$J' = J_2' = \frac{n'c}{nR'} + \frac{n'c}{anR'}e^{-\frac{t}{a}}C_2 - \frac{n'c}{nR'} = -\frac{n'c}{anR'}e^{-\frac{t}{a}}C_2.$$

Die Constanten C_1 und C_2 bestimmen sich aus den Bedingungen:

$$(J_1)_0 = 0 = \frac{Nn^2}{a^2R^2}\left(\int_0 Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right) \qquad C_1 = -\int_0 Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$(J_1)_\tau = (J_2)_\tau = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{Nn^2}{aR}\right)c + \frac{Nn^2}{a^2R^2}\,e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt =$$

$$= \frac{c}{R} + \frac{1}{a}\,e^{-\frac{\tau}{a}}\,\frac{c}{R}\,C_2$$

$$C_2 = -\frac{Nn^2}{R}\left(e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{ac}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right).$$

Man erhält also schliesslich:

$t = 0$ bis $t = \tau$

$$J_1 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{Nn^2}{aR}\right)F + \frac{Nn^2}{a^2R^2}\,e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$J_1' = -\frac{Nnn'}{aRR'}\left[F - \frac{1}{a}\,e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right]$$

$t = \tau$ bis $t = \infty$

$$J_2 = \frac{c}{R} - \frac{Nn^2c}{aR^2}\,e^{-\frac{t}{a}}\left[e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{ac}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right]$$

$$J_2' = -\frac{Nnn'c}{aRR'}\,e^{-\frac{t}{a}}\left[e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{ac}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right]$$

Nach Weber wird ein Strom, welcher während einer bestimmten Zeit T mit der constanten Intensität I' fliesst, dann als Äquivalentstrom des Inductionsstromes bezeichnet, wenn die beiden Gleichungen bestehen:

$$I'T = \int_0^\infty J'dt \quad \text{und} \quad I'^2T = \int_0^\infty J'^2dt$$

$$I'T = -\frac{Nnn'}{aRR'}\left\{\int_0^\tau Fdt - \frac{1}{a}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{a}}\,dt\int_0^t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + \right.$$

$$\left. + \left(ce^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{a}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right)\int_\tau^\infty e^{-\frac{t}{a}}\,dt\right\}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$I'T = -\frac{Nnn'}{aRR'}\left\{\int_0^\tau F dt + \left|{}^0 e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right|_0^\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^\tau F dt + ca - e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt\right\}$$

$$= -\frac{Nnn'}{RR'}\cdot c$$

$$I'^2 T = \left(\frac{Nnn'}{aRR'}\right)^2\left\{\int_0^\tau \left[F - \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2 dt + \right.$$

$$\left. + \left[c e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{\frac{\tau}{a}} dt\right]^2 \int_\tau^\infty e^{-\frac{2t}{a}} dt\right\}$$

$$= \left(\frac{Nnn'}{aRR'}\right)^2 \{A + B + C + D\}$$

$$D = \left(c e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt\right)^2 \int_\tau^\infty e^{-\frac{2t}{a}} dt =$$

$$= \frac{c^2 a}{2} - c e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt + \frac{1}{2a} e^{-\frac{2\tau}{a}}\left[\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2$$

$$C = \frac{1}{a^2}\int_0^\tau e^{-\frac{2t}{a}} dt \left[\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{2a}\left| e^{-\frac{2t}{a}}\left[\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2 \right._0 + \frac{1}{a}\int_0^\tau e^{-\frac{2t}{a}} F e^{\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$B = -\frac{2}{a}\int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$A = \int_0^\tau F^2 dt = \int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} F e^{\frac{t}{a}} dt =$$

$$= \left| F e^{-\frac{t}{a}} \int F e^{\frac{t}{a}} dt \right|_0^\tau - \int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(F e^{-\frac{t}{a}}\right) dt \int F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$= c e^{-\frac{\tau}{a}}\int_\tau F e^{\frac{t}{a}} dt + \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}}\int_t F e^{\frac{t}{a}} dt -$$

$$- \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$A + B + C + D = \frac{c^2 a}{2} + c e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt +$$

$$+ \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$= \frac{c^2 a}{2} + c e^{-\frac{\tau}{a}} \int_0 F e^{\frac{t}{a}} dt + \frac{1}{a} \left(\int_0 F e^{\frac{t}{a}} dt \right) \left[\left| - a F e^{-\frac{t}{a}} \right|_0^\tau + \right.$$

$$\left. + a \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \right] - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$= \frac{c^2 a}{2} - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$I'^2 T = \left(\frac{Nnn'}{aRR'} \right)^2 \left\{ \frac{c^2 a}{2} - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt \right\}.$$

Der inducirte Integralstrom $I'T$ hängt also von der Zeit τ und der Function F gar nicht, seine gesammte Arbeitsleistung $R'I'^2T$ in der Weise ab, dass sie sich für unendlich klein werdendes τ ein und derselben von F unabhängigen Grenze $\left(\frac{Nnn'}{aRR'}\right)^2 \frac{c^2 a}{2}$ nähert. Für diesen Grenzfall ist also die

Dauer des Äquivalentstromes: $T = 2a$,

Intensität des Äquivalentstromes: $I' = \frac{Nnn'}{2aRR'} c$,

$$\text{d. i. } \frac{1}{1 + \frac{n'^2 R}{n^2 R'}} \text{ mal}$$

so gross als der von Maxwell gefundene Werth $\frac{cn'}{2Rn}$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 105_2a

Autor(en)/Author(s): Singer Oskar

Artikel/Article: Über die wechselseitige Induetion zweier auf eine Kugelsehale gleichmässig gewickelter Windungslagen 165-169