©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Gastheorie

Dr. **Hans Benndorf.**

Zu dem Schönsten der Maxwell'schen Gastheorie gehört sicherlich die Art, in der die hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet werden. Von einer allgemeinen Functionalgleichung ausgehend, gewinnt Maxwell durch Specialisirung der Function die gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen, indem er nur Glieder von der höchsten Grössenordnung beibehält. Nimmt man aber noch Glieder der nächsten Ordnung mit auf, so ergeben sich ganz von selbst die Reibungs- und Wärmeleitungsgleichungen. Es erscheint nun im höchsten Grade interessant, die von Maxwell bereits angedeutete Näherungsrechnung auf weitere Glieder zu erstrecken; die Möglichkeit, dass sie auf neue Thatsachen führen könnte allein lässt dies wünschenswerth erscheinen, wenngleich man bei der Willkür der zu Grunde liegenden Hypothesen eine genaue Übereinstimmung der Theorie mit der experimentellen Forschung nicht erwarten darf.

Die vorliegende Abhandlung ist eine Vorarbeit für eine Fortsetzung der Maxwell'schen Rechnungen, die ich auf Anregung Herrn Hofrath Boltzmann's unternommen habe und veröffentliche, weil sie ein abgeschlossenes Ganze bildet, das, wenn auch in der Durchführung langwierig und uninteressant, im Resultat einiges Neue, mathematisch und physikalisch Interessante enthält.

Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Hofrath Boltzmann auch an dieser Stelle meinen herzlichsten

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Dank für die vielseitige Anregung und Förderung, deren ich mich von seiner Seite zu erfreuen hatte, auszusprechen.

Um mich in Folgendem möglichst kurz fassen zu können, verweise ich bezüglich aller Beweise und Ableitungen gleich hier auf Boltzmann's Gastheorie und werde die in diesem Buche gewählte Bezeichnungsweise streng beibehalten.

Die der Rechnung zu Grunde gelegten Voraussetzungen betreffend die Constitution des Gases sind folgende: Das Gas ist einatomig, die Moleküle sind Massenpunkte, die sich gegenseitig mit einer Kraft abstossen, die umgekehrt proportional der 5. Potenz der Entfernung ist; auf dieses Gas wirken äussere Kräfte X, Y, Z, die weder Functionen der Geschwindigkeit der Molekeln sind, noch die Zeit explicite enthalten.

Wir wollen ein Volumelement do eines solchen Gases betrachten; $f(\xi, \eta, \zeta)$ sei die Anzahl der Moleküle, welche die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ besitzen. Jedem Molekül lässt sich offenbar durch seine Geschwindigkeitscomponenten ein bestimmter Werth einer beliebigen Function 3 Variabeln $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ eindeutig zuordnen; bildet man die Summe aller dieser Werthe von φ für das ganze Volumelement, so ist nach Boltzmann's Bezeichnung

$$\sum\nolimits_{\omega, do} \varphi = do \int \varphi f \, d\omega,$$

wo $d\omega = d\xi d\eta d\zeta$ und die dreifache Integration von 0 bis ∞ zu erstrecken ist. $\sum_{\omega, do} \varphi$ wird sich im Allgemeinen mit der Zeit ändern, und zwar in Folge dreier Ursachen:

1. Durch das Wandern der Moleküle, indem welche aus dem Volumelemente austreten und andere eintreten.

2. Durch die Geschwindigkeitsänderungen, welche die äusseren Kräfte hervorrufen.

3. Durch die Stösse der Molekeln untereinander.

Für diese Veränderung der Grösse $\Sigma_{\omega, do} \varphi$ mit der Zeit ergibt sich die Differentialgleichung, aus der Maxwell durch Specialisirung der Function φ die hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet hat.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Dieselbe lautet:[1]

$$m\frac{d\Sigma_{\omega,\,do}\varphi}{dt} = \frac{\partial(\rho\overline{\varphi})}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho\overline{\xi\varphi})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho\overline{\eta\varphi})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho\overline{\zeta\varphi})}{\partial z} +$$

$$+\rho\left|X\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\xi} + Y\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\eta} + Z\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\zeta}\right| + mB_5(\varphi),$$

wobei m die Masse eines Moleküles, ρ die Dichte des Gases und $B_5(\varphi)$ ein achtfaches Integral bedeutet, welches die Veränderung von $\Sigma_{\omega,\,do}\varphi$ durch die Zusammenstösse der Molekeln allein darstellt und auf das ich weiter unten zurückkomme, da die Auswerthung desselben für Functionen 4. Grades den Gegenstand der vorliegenden Arbeit ausmacht. Die mit Querstrichen versehenen Grössen sind Mittelwerthe, die in üblicher Weise zu bilden sind.

Die obige Gleichung hat Boltzmann unter der Voraussetzung, dass φ eine ganze Function ist, für die Rechnung dadurch wesentlich vereinfacht, dass er für die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ, $u+\mathfrak{x}$, $v+\mathfrak{y}$, $w+\mathfrak{z}$ einführt, wo u, v, w die Componenten der sichtbaren Bewegung des Gases sind, während $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Geschwindigkeitscomponenten der Moleküle relativ gegen die sichtbare Bewegung bedeuten.

Setzt man $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{f}$ und führt die Transformation durch, so erhält man eine neue Differentialgleichung,[2] deren linke Seite der Ausdruck $mB_5(\mathfrak{f})$ bildet.

Die Auswerthung dieses Integrales $B_5(\mathfrak{f})$ für homogene ganze Functionen 4. Grades von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ist nothwendig, um die Maxwell'sche Annäherungsrechnung weiter durchführen zu können. Für Functionen 2. und 3. Grades ist dies bereits geschehen und für die Ableitung der Reibungs- und Wärmeleitungsgleichungen verwendet.

Da sich die Auswerthung des Integrales $B_5(\mathfrak{f})$ einfacher gestaltet, wenn $\mathfrak{f}$ eine körperliche Kugelfunction (deren Definition siehe Boltzmann, Gastheorie, S. 170) der Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ist und jede ganze homogene Function 4. Grades

---

[1] Boltzmann, Gastheorie, S. 145.

[2] l. c. S. 151.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dreier Variabeln sich darstellen lässt

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = a_1 \Pi_4 + a_2 \Pi_2 (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) + a_3 (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)^2,$$

wo a_1, a_2, a_3 constante Coëfficienten und Π_4, Π_2 die allgemeine körperliche Kugelfunction 4., respective 2. Grades bedeuten, ergibt es sich von selbst, statt $B_5(\mathfrak{f})$ direct zu berechnen,

$$B_5(\Pi_4), \qquad B_5[\Pi_2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)] \quad \text{und} \quad B_5[(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)^2]$$

einzeln auszuwerthen.

In Folgendem sollen nach einer kurzen Auseinandersetzung der Bedeutung des Ausdruckes $B_5(\mathfrak{f})$ der Reihe nach die obigen drei Ausdrücke berechnet werden.

Bedeutung von $B_5(\mathfrak{f})$.[1]

Wie schon oben erwähnt, ist $B_5(\mathfrak{f})$ die Veränderung von $\Sigma_{\omega, do}\, \mathfrak{f}$ mit der Zeit, die durch die Zusammenstösse der Molekeln untereinander bedingt ist. Es ist daher nothwendig, auf die Mechanik der Zusammenstösse einzugehen.

Wir greifen zwei Moleküle M und M_1 heraus; beide hätten die Masse m. Es seien die Componenten der Geschwindigkeit relativ gegen die Gesammtbewegung des Gases $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, vor und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ nach dem Stoss bei einem Molekül, die des anderen seien entsprechend $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{y}_1', \mathfrak{z}_1'$. Die abstossende Kraft zwischen beiden sei $\frac{K_1}{r^5}$; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1) = \mathfrak{f}_1, \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = \mathfrak{f}', \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1', \mathfrak{y}_1', \mathfrak{z}_1') = \mathfrak{f}_1';$$

f sei die Anzahl der Moleküle, die die gleiche Geschwindigkeit haben wie M, f_1 die Anzahl mit der Geschwindigkeit von M_1.

Wir denken uns nun das Molekül M ruhend und betrachten die Relativbewegung von M_1 gegen M. Die relative Geschwindigkeit von M_1 gegen M sei $g = g'$ vor und nach dem Stoss, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}'$ die entsprechenden Componenten; es werden dann die Richtungen von g und g' Asymptoten der Bahncurve des Moleküles M_1 sein, die den Winkel $\pi - 2\vartheta$ einschliessen

[1] Boltzmann, l. c. §. 17.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

mögen. Den Winkel, den die Bahnebene mit einer durch g und die Abscissenaxe gelegten Ebene bildet, sei schliesslich bezeichne b den kleinsten Abstand, an dem das Molekül M_1 an M vorüberfliegen würde, falls keine Kräfte zwischen ihnen thätig wären. In dieser Bezeichnungsweise lautet der Ausdruck für $B_5(\mathfrak{f})$:

$$B_5(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2}\iiint_0^\infty \int_0^{2\pi} (\mathfrak{f}' + \mathfrak{f}_1' - \mathfrak{f} - \mathfrak{f}_1) f f_1 g b \, d\omega \, d\omega_1 \, db \, d\varepsilon,$$

wenn $d\omega = d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}$ und $d\omega_1 = d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{y}_1 d\mathfrak{z}_1$ ist.

Die erste Integration von 0 bis 2π ist über ε zu erstrecken, wobei alle Grössen mit Ausnahme von $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}_1'$ constant sind. Aus rein rechnungstechnischen Gründen werden wir aber bei der Ausführung auch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ unter dem Integralzeichen lassen.

Die zweite Integration erstreckt sich über b von 0 bis ∞, d. h. über alle möglichen Bahnformen, wobei noch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ constant bleiben.

Die beiden letzten Integralzeichen schliesslich bedeuten eine sechsfache Integration von 0 bis ∞ über die Variabeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$.

Die Durchführung der Integration erleichtern und ermöglichen die wunderbaren Kunstgriffe Maxwell's; dank eines solchen kann die Integration nach ε durchgeführt werden, ohne dass man die Abhängigkeit des $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}_1'$ von zu kennen braucht, ein zweites ermöglicht, sich von der Berechnung der Functionen f und f_1 ganz unabhängig zu machen.

Wir wollen nun zur wirklichen Durchführung der Integration schreiten.

1. Berechnung von $B_5(\Pi_4)$.

Es sei Π_4 die allgemeinste körperliche Kugelfunction dreier Variabeln; sie lässt sich, wenn man mit $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ willkürliche Constanten bezeichnet, schreiben

$$\begin{aligned}\Pi_4 = {} & A_1\mathfrak{x}^4 + B_1\mathfrak{y}^4 + C_1\mathfrak{z}^4 + A_2\mathfrak{x}^3\mathfrak{y} + B_2\mathfrak{y}^3\mathfrak{z} + C_2\mathfrak{z}^3\mathfrak{x} + \\ & + A_3\mathfrak{x}^3\mathfrak{z} + B_3\mathfrak{y}^3\mathfrak{x} + C_3\mathfrak{z}^3\mathfrak{y} - 3(A_1 + B_1 - C_1)\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - \\ & - 3(-A_1 + B_1 + C_1)\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2 - 3(A_1 - B_1 + C_1)\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2 - \\ & - 3(B_2 + C_3)\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z} - 3(C_2 + A_3)\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x} - 3(A_2 + B_3)\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}.\end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es muss nun zuerst $\int_0^{2\pi} (\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1)\, d\varepsilon$ gebildet werden. Der Ausdruck $\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1 = W$ vereinfacht sich, wenn wir für die verschiedenen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ andere Variable einführen, und zwar die Componenten der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes, die ja durch den Stoss nicht verändert werden. Es seien $\frac{\mathfrak{u}}{2}$, $\frac{\mathfrak{v}}{2}$, $\frac{\mathfrak{w}}{2}$ diese Componenten und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$ die Componenten der relativen Geschwindigkeit des Moleküls M_1 gegen M vor und nach dem Stoss.

Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{x}+\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{p} &= \mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{p}' &= \mathfrak{x}'-\mathfrak{x}_1', \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{y}+\mathfrak{y}_1, & \mathfrak{q} &= \mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1, & \mathfrak{q}' &= \mathfrak{y}'-\mathfrak{y}_1', \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{z}+\mathfrak{z}_1, & \mathfrak{r} &= \mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1, & \mathfrak{r}' &= \mathfrak{z}'-\mathfrak{z}_1', \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{x} &= \mathfrak{u}+\mathfrak{p}, & 2\mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{u}-\mathfrak{p}, & 2\mathfrak{x}' &= \mathfrak{u}+\mathfrak{p}', & 2\mathfrak{x}_1' &= \mathfrak{u}-\mathfrak{p}' \\ 2\mathfrak{y} &= \mathfrak{v}+\mathfrak{q}, & 2\mathfrak{y}_1 &= \mathfrak{v}-\mathfrak{q}, & 2\mathfrak{y}' &= \mathfrak{v}+\mathfrak{q}', & 2\mathfrak{y}_1' &= \mathfrak{v}-\mathfrak{q}' \\ 2\mathfrak{z} &= \mathfrak{w}+\mathfrak{r}, & 2\mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{w}-\mathfrak{r}, & 2\mathfrak{z}' &= \mathfrak{w}+\mathfrak{r}', & 2\mathfrak{z}_1' &= \mathfrak{w}-\mathfrak{r}' \end{aligned}$$

folgt.

Führt man diese Werthe in W ein, so ist

$$\begin{aligned} 16\,W = {} & 6\mathfrak{u}^2(\mathrm{I}'-\mathrm{I})+6\mathfrak{v}^2(\mathrm{II}'-\mathrm{II})+6\mathfrak{w}^2(\mathrm{III}'-\mathrm{III})+ \\ & +2\mathfrak{u}\mathfrak{w}(\mathrm{IV}'-\mathrm{IV})+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathrm{V}'-\mathrm{V})+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}(\mathrm{VI}'-\mathrm{VI})+2(\mathrm{VII}'-\mathrm{VII}), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = {} & 2A_1\mathfrak{p}^2-(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{q}^2-(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{r}^2+A_2\mathfrak{p}\mathfrak{q}- \\ & -(B_2+C_3)\mathfrak{q}\mathfrak{r}+A_3\mathfrak{r}\mathfrak{p}, \\ \mathrm{II} = {} & 2B_1\mathfrak{q}^2-(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{r}^2-(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{p}^2+B_2\mathfrak{q}\mathfrak{r}- \\ & -(C_2+A_3)\mathfrak{r}\mathfrak{p}+B_3\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \\ \mathrm{III} = {} & 2C_1\mathfrak{r}^2-(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{p}^2-(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{q}^2+C_2\mathfrak{r}\mathfrak{p}- \\ & -(A_2+B_3)\mathfrak{p}\mathfrak{q}+C_3\mathfrak{q}\mathfrak{r}, \\ \mathrm{IV} = {} & 3A_2\mathfrak{p}^2+3B_3\mathfrak{q}^2-3(A_2+B_3)\mathfrak{r}^2-12(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{p}\mathfrak{q}- \\ & -6(C_2+A_3)\mathfrak{q}\mathfrak{r}-6(B_2+C_3)\mathfrak{r}\mathfrak{p}, \end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\mathrm{V} = 3B_2\mathfrak{q}^2+3C_3\mathfrak{r}^2-3(B_2+C_3)\mathfrak{p}^2-12(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{q}\mathfrak{r}-$$
$$-6(A_2+B_3)\mathfrak{r}\mathfrak{p}-6(C_2+A_3)\mathfrak{p}\mathfrak{q},$$

$$\mathrm{VI} = 3C_2\mathfrak{r}^2+3A_3\mathfrak{p}^2-3(C_2+A_3)\mathfrak{q}^2-12(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{r}\mathfrak{p}-$$
$$-6(B_2+C_3)\mathfrak{p}\mathfrak{q}-6(A_2+B_3)\mathfrak{q}\mathfrak{r},$$

$$\mathrm{VII} = A_1\mathfrak{p}^4+B_1\mathfrak{q}^4+C_1\mathfrak{r}^4+A_2\mathfrak{p}^3\mathfrak{q}+B_2\mathfrak{q}^3\mathfrak{r}+C_2\mathfrak{r}^3\mathfrak{p}+A_3\mathfrak{p}^3\mathfrak{r}+$$
$$+B_3\mathfrak{q}^3\mathfrak{p}+C_3\mathfrak{r}^3\mathfrak{q}-3(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2-$$
$$-3(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{q}^2\mathfrak{r}^2-3(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{r}^2\mathfrak{p}^2-$$
$$-3(B_2+C_3)\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}\mathfrak{q}-3(C_2+A_3)\mathfrak{q}^2\mathfrak{p}\mathfrak{r}-3(A_2+B_3)\mathfrak{r}^2\mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

und

$$\mathrm{I}', \quad \mathrm{II}', \quad \mathrm{III}', \quad \mathrm{IV}', \quad \mathrm{V}', \quad \mathrm{VI}', \quad \mathrm{VII}'$$

die analogen Ausdrücke mit den gestrichelten Buchstaben sind.

Zur Ausführung der Integration nach ε bedient man sich mit Vortheil eines Maxwell'schen Kunstgriffes, der auf folgender Eigenschaft von Kugelfunctionen beruht.[1]

Denken wir uns von einem Punkte 0 aus die Geschwindigkeiten g und g' der Grösse und Richtung nach aufgetragen und nennen wir die Endpunkte dieser Strecken G und G', so liegen sie auf einer Kugelfläche vom Radius $g = g'$ und die beiden Geraden schliessen den Winkel $\pi - 2\vartheta$ ein. Die sphärischen Coordinaten von G und G' seien λ, ν und λ', ν', so dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= g\cos\lambda, & \mathfrak{p}' &= g\cos\lambda', \\ \mathfrak{q} &= g\sin\lambda\cos\nu, & \mathfrak{q} &= g\sin\lambda'\cos\nu', \\ &= g\sin\lambda\sin\nu, & \mathfrak{r}' &= g\sin\lambda'\sin\nu' \end{aligned} \qquad 1)$$

ist; eine durch 0 parallel mit der X-Axe gelegte Gerade durchsteche die Kugelfläche im Punkte X, dann ist der Winkel, den die Ebenen GOX und GOG' miteinander bilden, der Winkel ε. Bezeichnet $p^{(n)}(\varphi, \psi)$ eine Kugelflächenfunction n^{ten} Grades der Variabeln φ und ψ, und bildet nun das Integral $\int_0^{2\pi} p^{(n)}(\lambda', \nu')\,d\varepsilon$, indem man den Punkt G' im Kreise um den Punkt G herumführt, so ist nach Maxwell

$$\int_0^{2\pi} p^{(n)}(\lambda'\nu')\,d\varepsilon = 2\pi P^{(n)}_{[\cos(\pi-2\vartheta)]}\,p^{(n)}(\lambda, \nu)$$

---

[1] Über die Ableitung siehe Boltzmann, I. S. 171.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wobei $P^{(n)}_{[\cos(\pi-2\vartheta)]}$ die zonale Kugelfunction n^{ten} Grades $\Big($Coëfficient von x^n in der Entwicklung von

$$(1-2\cos(\pi-2\vartheta)x+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big)$$

bezeichnet.

Die Anwendung dieses Satzes auf unsere Integrationen leuchtet ein. Die Ausdrücke I′, II′ etc. sind körperliche Kugelfunctionen 2., respective 4. Grades der Variabeln $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, die in Kugelflächenfunctionen durch die Substitutionen 1) übergeführt werden. Wir erhalten dann

$$\int_0^{2\pi} 16\, W d\varepsilon = 2\pi\{[P^{(2)}(\cos(\pi-2\vartheta))-1][6\mathfrak{u}^2\mathrm{I}+6\mathfrak{v}^2\mathrm{II}+$$
$$+6\mathfrak{w}^2\mathrm{III}+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV}+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathrm{V}+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathrm{VI}]+[P^4(\cos(\pi-2\vartheta))-1][2\mathrm{VII}]\}.$$

Nun ist

$$P^{(2)}(\cos(\pi-2\vartheta)) = \frac{3}{2}\cos^2 2\vartheta-\frac{1}{2},$$

$$P^{(4)}(\cos(\pi-2\vartheta)) = \frac{35}{8}\cos^4 2\vartheta-\frac{15}{4}\cos^2 2\vartheta+\frac{3}{8},$$

so dass

$$\int_0^{2\pi} 2\, W d\varepsilon = -3\pi\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta[3\mathfrak{u}^2\mathrm{I}+3\mathfrak{v}^2\mathrm{II}+3\mathfrak{w}^2\mathrm{III}+\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV}+$$
$$+\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathrm{V}+\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathrm{VI}]+\pi[35\sin^4\vartheta\cos^4\vartheta-10\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta]\mathrm{VII}$$

wird.

Nun können wir zur Integration noch b schreiben. Da nur ϑ von b abhängig ist, sind die beiden Ausdrücke

$$\int_0^\infty \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, b db \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \sin^4\vartheta\cos^4\vartheta\, b db$$

zu bilden.

Die Abhängigkeit des b von ϑ ist eine sehr complicirte, lässt sich jedoch einfach aus den Bewegungsgleichungen für das Molekül M_1 berechnen.[1] Diese Integrale lassen sich für

[1] Siehe Boltzmann, l. c. §. 21.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

etwaige Bedürfnisse der Praxis durch mechanische Quadratur immer auswerthen. So berechnete Maxwell

$$\pi\int_0^\infty \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, bdb = \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\,.\,C_1 =$$

$$= \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\;1{\cdot}3682 = D_1\,.\,\frac{1}{g};$$

analog können wir setzen

$$\pi\int_0^\infty \sin^4\vartheta\cos^4\vartheta\, bdb = D_2\,\frac{1}{g},$$

so dass

$$\pi\int_0^\infty \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, gbdb = D_1$$

und

$$\pi\int_0^\infty \sin^4\vartheta\cos^4\vartheta\, gbdb = D_2$$

wird. Es ist dann

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} 2\,Wgbdbd\varepsilon = -3D_1[3\mathfrak{u}^2\mathrm{I}+3\mathfrak{v}^2\mathrm{II}+3\mathfrak{w}^2\mathrm{III}+\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV}+ \\ +\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathrm{V}+\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathrm{VI}]+[35D_2-10D_1]\mathrm{VII}. \qquad 2)$$

Um nun die übrigbleibenden Integrationen nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ ausführen zu können, müssen wir in Gleichung 2) auf der rechten Seite für die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ wieder die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ einführen. Thut man dies, so erhält man lauter Glieder von der Form $L\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y}^\beta\mathfrak{z}^\gamma\mathfrak{x}_1^\delta\mathfrak{y}_1^\varepsilon\mathfrak{z}_1^\zeta$, wo L eine Constante ist. Bei der dreifachen Integration nach den mit dem Index 1 versehenen Buchstaben sind die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ constant; die Integrale werden daher die Form haben:

$$L\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y}^\beta\mathfrak{z}^\gamma\iiint_0^\infty \mathfrak{x}_1^\delta\mathfrak{y}_1^\varepsilon\mathfrak{z}_1^\zeta f_1 d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{y}_1 d\mathfrak{z}_1. \qquad 3)$$

Um sich von der Bestimmung der Function f_1, welche die Geschwindigkeitsvertheilung bestimmt, frei zu machen, schlägt Maxwell folgenden Weg ein:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der Mittelwerth $\overline{\chi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}$ einer Function χ der Variabeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ für alle zu einer bestimmten Zeit im Volumelement do sich befindenden Moleküle ist

$$\bar{\chi} = \frac{\int\int\int \chi \cdot f d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}}{\int\int\int f d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}};$$

da nun

$$m do \int\int\int f d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z} = \rho\, do,$$

wo ρ die Dichte des Gases, so ist

$$\iiint \chi f d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z} = \frac{\rho}{m}\, \bar{\chi}$$

und da die Bezeichnung der Variabeln ja irrelevant, analog

$$\iiint \chi_1 f_1 d\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{y}_1\, d\mathfrak{z}_1 = \frac{\rho}{m}\, \bar{\chi}_1 = \frac{\rho}{m}\, \bar{\chi},$$

wenn $\chi_1 = \chi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$ ist.

Wir erhalten so aus dem Ausdruck 3) nach Ausführung der Integration

$$\frac{\rho}{m} L \cdot \mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta \mathfrak{z}^\gamma \cdot \overline{\mathfrak{x}^\delta \mathfrak{y}^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta}.$$

Nach analoger Durchführung der letzten Integrationen in Bezug auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$:

$$\frac{\rho}{m} L\, \overline{\mathfrak{x}^\delta \mathfrak{y}^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta} \iiint \mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta \mathfrak{z}^\gamma f d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z} = \frac{\rho^2}{m^2} L\, \overline{\mathfrak{x}^\delta \mathfrak{y}^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta} \cdot \overline{\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta \mathfrak{z}^\gamma}.$$

Beim Einsetzen der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ in den Ausdruck 2) können wir gleich eine Vereinfachung eintreten lassen, indem wir alle Glieder, in denen entweder $\alpha+\beta+\gamma = 1$ oder $\delta+\varepsilon+\zeta = 1$ ist, fortlassen, da sie im Resultate doch wegfallen würden, weil $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{x}}_1 = \bar{\mathfrak{y}}_1 = \bar{\mathfrak{z}}_1 = 0$ ist.

Führt man nun die $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ ein, so ist

$$\begin{aligned}
3\mathfrak{u}^2 I = 3[&2 A_1(\mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2)- \\
&-(A_1+B_1-C_1)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2-4\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)- \\
&-(A_1-B_1+C_1)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2-4\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1)+ \\
&+A_2(\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1-\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1^2-\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}^2)- \\
&-(B_2+C_3)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}\mathfrak{y})+ \\
&+A_3(\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1^2-\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}^2)
\end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und daher nach Obigem

$$\left.\begin{aligned}\iint 3\mathfrak{u}^2\mathrm{I}\,ff_1 d\omega\, d\omega_1 = 6\frac{\rho^2}{m^2}[&2A_1(\overline{\mathfrak{x}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2)-\\ &-(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2)-(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2)+\\ &+A_2(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})-(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})+A_3(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})],\end{aligned}\right\}\quad 4)$$

woraus sich durch cyklische Permutation ergibt

$$\left.\begin{aligned}\iint 3\mathfrak{v}^2\mathrm{II}\,ff_1 d\omega\, d\omega_1 = 6\frac{\rho^2}{m^2}[&2B_1(\overline{\mathfrak{y}^4}-\overline{\mathfrak{y}^2}^2)-\\ &-(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2)-(A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}^2)+\\ &+B_2(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})-(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})+B_3(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})]\end{aligned}\right\}\quad 5)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\iint 3\mathfrak{w}^2\mathrm{III}\,ff_1 d\omega\, d\omega_1 = 6\frac{\rho^2}{m^2}[&2C_1(\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{z}^2}^2)-\\ &-(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2)-(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}^2)+\\ &+C_2(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})-(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})+C_3(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})].\end{aligned}\right\}\quad 6)$$

Man erhält ferner

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV} = 3[&A_2(\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1-\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y})+B_3(\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^3\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y})-\\ &-(A_2+B_3)(\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z})-\\ &-4(A_1+B_1-C_1)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2)-2(C_2+A_3)(\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}\mathfrak{z}+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{z})-\\ &-2(B_2+C_3)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z})]\end{aligned}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned}\iint \mathfrak{u}\mathfrak{v}\,\mathrm{IV}\,ff_1 d\omega\, d\omega_1 = 6\frac{\rho^2}{m^2}[&A_2(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})+B_3(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})-\\ &-(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})-4(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2})-\\ &-2(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-2(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})],\end{aligned}\right\}\quad 7)$$

woraus sich wieder durch cyklische Permutation ergibt

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\iint \mathfrak{w}\mathfrak{v}\,\mathrm{V}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\,[\,B_2(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})+$$
$$+C_3(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})-(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})-$$
$$-4(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2})-2(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})- \qquad 8)$$
$$-2(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})\,]$$

und

$$\iint \mathfrak{w}\mathfrak{u}\,\mathrm{VI}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\,[\,C_2(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})+A_3(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-$$
$$-(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})-4(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2})- \qquad 9)$$
$$-2(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})-2(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}_2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})\,];$$

schliesslich ist

$$\iint \mathrm{VII}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\,[\,A_1(\overline{\mathfrak{x}^4}+3\,\overline{\mathfrak{x}^2}^{\,2})+B_1(\overline{\mathfrak{y}^4}+3\,\overline{\mathfrak{y}^2}^{\,2})+C_1(\overline{\mathfrak{z}^4}+3\,\overline{\mathfrak{z}^2}^{\,2})$$
$$+A_2(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+3\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})+B_2(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+3\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})+C_2(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+3\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})+$$
$$+A_3(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}+3\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})+B_3(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}+3\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})+C_3(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}+3\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})-$$
$$-3(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^{\,2})-$$
$$-3(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^{\,2})- \qquad 10)$$
$$-3(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^{\,2})-$$
$$-3(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-3(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})-$$
$$-3(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})\,]$$

Nun war

$$B_5(\Pi_4) = \frac{1}{2}\iiint_0^\infty\int_0^{2\pi} W ff_1\,gb\,d\omega\,d\omega_1\,db\,d\varepsilon$$

und man erhält aus 2), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 10)

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$
\left.
\begin{aligned}
B_5(\Pi_4) = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{m^2}\{&[35D_2-28D_1][A_1\overline{\mathfrak{x}^4}+B_1\overline{\mathfrak{y}^4}+C_1\overline{\mathfrak{z}^4}+A_2\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+B_2\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+\\
&+C_2\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+A_3\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}+B_3\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}+C_3\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}-3(A_1+B_1-C_1)\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}-\\
&-3(-A_1+B_1+C_1)\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}-3(A_1-B_1+C_1)\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-3(B_2+C_3)\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\\
&-3(C_2+A_3)\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-3(A_2+B_3)\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}]+[35D_2-4D_1][3A_1\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\\
&+3B_1\overline{\mathfrak{y}^2}^2+3C_1\overline{\mathfrak{z}^2}^2+3A_2\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+3B_2\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+3C_2\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+3A_3\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}+\\
&+3B_3\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}+3C_3\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}-3(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2)-\\
&-3(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2)-3(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2)-\\
&-3(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-3(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})-\\
&-3(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})]\}\,.
\end{aligned}
\right\}\ 11)
$$

2. Berechnung von $B_5[\Pi_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)]$.

Bei der Berechnung dieses Integrals ist im Allgemeinen analog vorzugehen, wie früher; Π_2 sei die allgemeinste Kugelfunction 2. Grades, die bekanntlich fünf willkürliche Constanten enthält. Setzen wir

$$\Pi_2 = A_1\mathfrak{x}^2+B_1\mathfrak{y}^2+C_1\mathfrak{z}^2+A_2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+B_2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+C_2\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

so besteht, damit dieser Ausdruck eine Kugelfunction wird, nur die Relation

$$A_1+B_1+C_1 = 0,$$

womit die Anzahl der Constanten sich auf fünf reducirt. Bezeichnen wir wieder

$$\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1 = W$$

und führen statt der verschiedenen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Variabeln

$$\mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{p}',\ \mathfrak{q}',\ \mathfrak{r}'$$

ein, so erhält man:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$
\begin{aligned}
16\,W = {} & (\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)[12\,A_1\mathfrak{u}^2+2(A_1+B_1)\mathfrak{v}^2+2(C_1+A_1)\mathfrak{w}^2+ \\
& \qquad +6\,A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+6\,C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+2\,B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}]+ \\
& +(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)[12\,B_1\mathfrak{v}^2+2(B_1+C_1)\mathfrak{w}^2+2(A_1+B_1)\mathfrak{u}^2+ \\
& \qquad +6\,B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+6\,A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+2\,C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}]+ \\
& +(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)[12\,C_1\mathfrak{w}^2+2(C_1+A_1)\mathfrak{u}^2+2(B_1+C_1)\mathfrak{v}^2+ \\
& \qquad +6\,C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+6\,B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+2\,A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}]+ \\
& +(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})[8(A_1+B_1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}+2\,A_2(3\,\mathfrak{u}^2+3\,\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)+ \\
& \qquad +4\,B_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+4\,C_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}]+ \\
& +(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})[8(B_1+C_1)\mathfrak{v}\mathfrak{w}+2\,B_2(3\,\mathfrak{v}^2+3\,\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2)+ \\
& \qquad +4\,C_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+4\,A_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}]+ \\
& +(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p})[8(C_1+A_1)\mathfrak{w}\mathfrak{u}+2\,C_2(3\,\mathfrak{w}^2+3\,\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2)+ \\
& \qquad +4\,A_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+4\,B_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}]+ \\
& +2A_1(\mathfrak{p}'^4-\mathfrak{p}^4)+2(A_1+B_1)(\mathfrak{p}'^2\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2)+2A_2(\mathfrak{p}'^3\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}^3\mathfrak{q})+ \\
& \qquad +2\,A_2(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'^3-\mathfrak{p}\mathfrak{q}^3)+2\,A_2(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}^2)+ \\
& +2B_1(\mathfrak{q}'^4-\mathfrak{q}^4)+2(B_1+C_1)(\mathfrak{q}'^2\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{q}^2\mathfrak{r}^2)+2\,B_2(\mathfrak{q}'^3\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}^3\mathfrak{r})+ \\
& \qquad +2\,B_2(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'^3-\mathfrak{q}\mathfrak{r}^3)+2\,B_2(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{p}^2)+ \\
& +2\,C_1(\mathfrak{r}'^4-\mathfrak{r}^4)+2(C_1+A_1)(\mathfrak{r}'^2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{r}^2\mathfrak{p}^2)+2\,C_2(\mathfrak{r}'^3\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}^3\mathfrak{p})+ \\
& \qquad +2\,C_2(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'^3-\mathfrak{r}\mathfrak{p}^3)+2\,C_2(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{r}\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2).
\end{aligned}
$$

Berücksichtigt man, dass

$$\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2+\mathfrak{r}'^2 = \mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2,$$

so ergibt sich, indem man aus den ersten drei Gliedern

$$2\,A_1\mathfrak{u}^2+2\,B_1\mathfrak{v}^2+2\,C_1\mathfrak{w}^2+6\,A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+6\,B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+6\,C_2\mathfrak{v}\mathfrak{u}$$

heraushebt und die Glieder, welche in Bezug auf $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ von der 4. Dimension sind, auf solche 2. Dimension reducirt, die einfachere Gleichung

$$
\begin{aligned}
16\,W = {} & (\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)\,\mathrm{I}+(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)\,\mathrm{II}+(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)\,\mathrm{III}+(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})\,\mathrm{IV}+ \\
& +(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})\,\mathrm{V}+(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p})\,\mathrm{VI},
\end{aligned}
\qquad 12)
$$

wobei I, II, III, IV, V, VI folgende Bedeutung haben:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\mathrm{I} = 2A_1(5\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+g^2)-4B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w},$$
$$\mathrm{II} = 2B_1(5\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+g^2)-4C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u},$$
$$\mathrm{III} = 2C_1(5\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+g^2)-4A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v},$$
$$\mathrm{IV} = 2A_2(3\mathfrak{u}^2+3\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+g^2)+8(A_1+B_1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}+4B_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+4C_2\mathfrak{v}\mathfrak{w},$$
$$\mathrm{V} = 2B_2(3\mathfrak{v}^2+3\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+g^2)+8(B_1+C_1)\mathfrak{v}\mathfrak{w}+4C_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+4A_2\mathfrak{w}\mathfrak{u},$$
$$\mathrm{VI} = 2C_2(3\mathfrak{w}^2+3\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+g^2)+8(C_1+A_1)\mathfrak{w}\mathfrak{u}+4A_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+4B_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}.$$

Um nun in Gleichung 12) die Integration nach ε in der früheren Weise ausführen zu können, müssen die Coëfficienten von I, II und III erst in Kugelfunctionen verwandelt werden. Dies geschieht am einfachsten, wenn wir setzen

$$\mathfrak{p}'^2 = \frac{2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{r}'^2+g^2}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}^2 = \frac{2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2+g^2}{3}$$

und analoge Ausdrücke für $\mathfrak{q}'^2$, $\mathfrak{q}^2$ und $\mathfrak{r}'^2$, $\mathfrak{r}^2$. Nach Anwendung des Maxwell'schen Satzes für Kugelfunctionen, erhalten wir als erstes Integrationsresultat:

$$\int_0^{2\pi} 16\,W d\varepsilon = -4\pi \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta\,[(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2)\mathrm{I}+$$
$$+(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)\mathrm{II}+(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)\mathrm{III}+3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\mathrm{IV}+3\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,\mathrm{V}+3\mathfrak{r}\mathfrak{p}\,\mathrm{VI}].$$

Setzen wir wieder

$$\pi\int_0^\infty \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta\, g b\, db = D_1,$$

so ist

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} 2\,W g b\, db\, d\varepsilon = -\frac{D_1}{2}[(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2)\mathrm{I}+$$
$$+(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)\mathrm{II}+(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)\mathrm{III}+3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\mathrm{IV}+3\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,\mathrm{V}+3\mathfrak{r}\mathfrak{p}\,\mathrm{VI}].$$

Um nun die beiden letzten Integrationen noch auszuführen setzen wir wieder die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ ein. Es ist zunächst

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} 2\,W g b\, db\, d\varepsilon = -D_1\left[3\mathfrak{p}^2\frac{\mathrm{I}}{2}+3\mathfrak{q}^2\frac{\mathrm{II}}{2}+3\mathfrak{r}^2\frac{\mathrm{III}}{2}-\right.$$
$$\left.-g^2\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{2}+3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\frac{\mathrm{IV}}{2}+3\mathfrak{q}\mathfrak{r}\frac{\mathrm{V}}{2}+3\mathfrak{r}\mathfrak{p}\frac{\mathrm{VI}}{2}\right]. \qquad 13)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es ergibt sich

$$3\mathfrak{p}^2\frac{\mathrm{I}}{2} = A_1(18\mathfrak{x}^4+18\mathfrak{x}_1^4-12\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2+6\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2+6\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2+$$
$$+6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2+6\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2+6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2+6\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2+6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2)-$$
$$-6B_2(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1),$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned}&\iint 3\mathfrak{p}^2\frac{\mathrm{I}}{2}ff_1\,d\omega\,d\omega_1 =\\ &= \frac{2\rho^2}{m^2}[6A_1(3\overline{\mathfrak{x}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2})-\\ &\qquad -6B_2(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})]\end{aligned}\right\}\ 14)$$

und durch cyklische Permutation ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&\iint 3\mathfrak{q}^2\frac{\mathrm{II}}{2}ff_1\,d\omega\,d\omega_1 =\\ &= \frac{2\rho^2}{m^2}[6B_1(3\overline{\mathfrak{y}^4}-\overline{\mathfrak{y}^2}^2+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2})-\\ &\qquad -6C_2(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})].\end{aligned}\right\}\ 15)$$

$$\left.\begin{aligned}&\iint 3\mathfrak{r}^2\frac{\mathrm{III}}{2}ff_1\,d\omega\,d\omega_1 =\\ &= \frac{2\rho^2}{m^2}[6C_1(3\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{z}^2}^2+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2})-\\ &\qquad -6A_2(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})].\end{aligned}\right\}\ 16)$$

Ferner ist unter Berücksichtigung, dass $A_1+B_1+C_1=0$

$$-g^2\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{2} = -4A_1|\mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2+$$
$$+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2-4\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2-4\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1|-$$
$$-4B_1|\mathfrak{y}^4+\mathfrak{y}_1^4-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}^2-4\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+$$
$$+\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}^2-4\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1|-$$
$$-4C_1|\mathfrak{z}^4+\mathfrak{z}_1^4-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}^2-4\mathfrak{z}\mathfrak{x}\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+$$
$$+\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}^2-4\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1|+$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$
\begin{aligned}
&+2B_2\,|\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}+\mathfrak{y}_1^3\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^3\mathfrak{y}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\\
&\quad+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}\mathfrak{y}-\\
&\qquad-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}|+\\
&+2C_2\,|\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}+\mathfrak{z}_1^3\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{z}_1+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+\\
&\quad+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z}-\\
&\qquad-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\\
&+2A_2\,|\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^3\mathfrak{x}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\\
&\quad+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1-\\
&\qquad-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}
\end{aligned}
$$

und nach der Integration

$$
\begin{aligned}
&-\iint g^2\,\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1=\\
&=\frac{2\rho^2}{m^2}\,[-4A_1(\overline{\mathfrak{x}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2)-\\
&\quad-4B_1(\overline{\mathfrak{y}^4}-\overline{\mathfrak{y}^2}^2+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}^2)-\\
&\quad-4C_1(\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{z}^2}^2+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}^2)+\\
&\quad+2B_2(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})+\\
&\quad+2C_2(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})+\\
&\qquad+2A_2(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})]\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Schliesslich ist

$$
\begin{aligned}
3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\frac{\mathrm{IV}}{2}&=6A_2\,|2\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+2\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}^3+2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1^3+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\\
&\quad+12(A_1+B_1)\,|\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2|+\\
&\quad+6B_2\,|\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}|+6C_2\,|\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}|
\end{aligned}
$$

und daher

$$
\begin{aligned}
\iint 3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\frac{\mathrm{IV}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1&=\frac{2\rho^2}{m^2}\,[6A_2(2\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}^3}+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})+\\
&+(12A_1+B_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2})+6B_2(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})+6C_2(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})]\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Analog ergibt sich durch cyklische Permutation

$$\iint 3\,\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,\frac{\mathrm{V}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\,[\,6\,B_2\,(2\,\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}} + 2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}^3} + \overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}) + \tag{19}$$
$$+\,12\,(B_1 + C_1)\,(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2} - \overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}) + 6\,C_2\,(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}} - \overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}) + 6\,A_2\,(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}\mathfrak{x}} - \overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})\,].$$

$$\iint 3\,\mathfrak{r}\mathfrak{p}\,\frac{\mathrm{VI}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\,[\,6\,C_2\,(2\,\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}} + 2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}^3} + \overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}} + \overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}) + \tag{20}$$
$$+\,12\,(C_1 + A_1)\,(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2} - \overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}) + 6\,A_2\,(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}} - \overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}) + 6\,B_2\,(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}\mathfrak{y}} - \overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})\,].$$

Setzt man nun die Ausdrücke 14) bis 20) in die Gleichung 13) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
B_5\,[\Pi_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)] &= \frac{1}{2}\iiint_0^\infty\int_0^{2\pi} W ff_1\,gb\,d\omega\,d\omega_1\,db\,d\varepsilon = \\
= -\frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{m^2}\,D_1[\,14(&\overline{A_1\mathfrak{x}^2 + B_1\mathfrak{y}^2 + C_1\mathfrak{z}^2 + A_2\mathfrak{x}\mathfrak{y} + B_2\mathfrak{y}\mathfrak{z} + C_2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)) - \\
&-2\,A_1\,\overline{\mathfrak{x}^2}^2 - 10\,(A_1+B_1)\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2} - 2\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} - 2\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{y}^2} - 10\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{z}^2} + \\
&\qquad + 8\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + 8\,(A_1+B_1)\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2 - \\
&-2\,B_1\,\overline{\mathfrak{y}^2}^2 - 10\,(B_1+C_1)\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2} - 2\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} - 2\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{z}^2} - 10\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{x}^2} + \\
&\qquad + 8\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}} + 8\,(B_1+C_1)\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2 - \\
&-2\,C_1\,\overline{\mathfrak{z}^2}^2 - 10\,(C_1+A_1)\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2} - 2\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}} - 2\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{x}^2} - 10\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{y}^2} + \\
&\qquad + 8\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} + 8\,(C_1+A_1)\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2\,],
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wobei zu beachten ist, dass $A_1 + B_1 + C_1 = 0$ sein muss.

3. Berechnung von $B_5\,[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2]$.

Führen wir hier, sowie früher, die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ein, so ist:

$$\begin{aligned}
16\,W = {}& 4\,(\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{p}^2)\,(3\,\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2) + 16\,\mathfrak{u}\mathfrak{v}\,(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}' - \mathfrak{p}\mathfrak{q}) + \\
&+ 4\,(\mathfrak{q}'^2 - \mathfrak{q}^2)\,(3\,\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{u}^2) + 16\,\mathfrak{v}\mathfrak{w}\,(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}' - \mathfrak{q}\mathfrak{r}) + \\
&+ 4\,(\mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{r}^2)\,(3\,\mathfrak{w}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2) + 16\,\mathfrak{w}\mathfrak{u}\,(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}' - \mathfrak{r}\mathfrak{p}) + \\
&+ 2\,(\mathfrak{p}'^4 - \mathfrak{p}^4) + 2\,(\mathfrak{q}'^4 - \mathfrak{q}^4) + 2\,(\mathfrak{r}'^4 - \mathfrak{r}^4) + 4\,(\mathfrak{p}'^2\mathfrak{q}'^2 - \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2) + \\
&\qquad + 4\,(\mathfrak{q}'^2\mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{q}^2\mathfrak{r}^2) + 4\,(\mathfrak{r}'^2\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{p}^2)\,.\,\mathfrak{r}^2
\end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Unter Berücksichtigung von $\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2+\mathfrak{r}'^2=\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2$ vereinfacht sich dieser Ausdruck wesentlich und nimmt die Form an:

$$2W = \mathfrak{u}^2(\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)+\mathfrak{v}^2(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)+\mathfrak{w}^2(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})+ \\ +2\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p}).$$

Da die Coëfficienten von $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{w}^2$ keine Kugelfunctionen sind, so setzen wir wieder

$$\mathfrak{p}'^2 = \frac{2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{r}'^2+g^2,}{3}, \qquad \mathfrak{p}^2 = \frac{2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2+g^2}{3}$$

und analog $\mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{r}^2$; wird dann die Integration nach ε durchgeführt, so ist:

$$\int_0^{2\pi} 2\,W d\varepsilon = -12\pi \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \left[\frac{\mathfrak{u}^2}{3}(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2)+\right. \\ \left.+\frac{\mathfrak{v}^2}{3}(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)+\frac{\mathfrak{w}^2}{3}(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathfrak{r}\mathfrak{p}\right].$$

Setzen wir dann

$$D_1 = \pi\int_0^\infty \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta\, gb\, db,$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} 2\,W gb\, db\, d\varepsilon &= -4\,D_1[\mathfrak{u}^2(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2)+ \\ &+\mathfrak{v}^2(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)+\mathfrak{w}^2(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)+6\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+ \\ &+6\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+6\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathfrak{r}\mathfrak{p}] = -D_1[12(\mathfrak{u}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}\mathfrak{q}+\mathfrak{w}\mathfrak{r})^2- \\ &\qquad -4g^2(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)].\end{aligned}\right\} 22)$$

Führen wir dann wieder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ ein, so wird

$$(\mathfrak{u}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}\mathfrak{q}+\mathfrak{w}\mathfrak{r})^2 = \mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4+\mathfrak{y}^4+\mathfrak{y}_1^4+\mathfrak{z}^4+\mathfrak{z}_1^4-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2+2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2+ \\ +2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2- \\ -2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1^2+2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1^2-2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1^2-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1^2$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und

$$\iint (\mathfrak{u}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}\mathfrak{q}+\mathfrak{w}\mathfrak{r})\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\,(\overline{\mathfrak{x}^4}+\overline{\mathfrak{y}^4}+\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2-\overline{\mathfrak{y}^2}^2-$$
$$-\overline{\mathfrak{z}^2}^2+2\,\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+2\,\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+2\,\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}). \qquad 23)$$

Ebenso ist

$$g^2(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2) = \mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4+\mathfrak{y}^4+\mathfrak{y}_1^4+\mathfrak{z}^4+\mathfrak{z}_1^4-2\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2-2\,\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1^2-2\,\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1^2+$$
$$+2\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+2\,\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2+2\,\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2+2\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2-8\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+$$
$$+2\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2+2\,\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2+2\,\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2+2\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2-8\,\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1+$$
$$+2\,\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2+2\,\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1^2+2\,\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}^2+2\,\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1^2-8\,\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$$

und daher

$$\left.\begin{aligned}\iint g^2(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m}[&\overline{\mathfrak{x}^4}+\overline{\mathfrak{y}^4}+\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2-\overline{\mathfrak{y}^2}^2-\\ &-\overline{\mathfrak{z}^2}^2+2\,\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+2\,\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+2\,\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+\\ &+2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+2\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-4\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2-4\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2-4\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2\end{aligned}\right\} 24)$$

So erhalten wir schliesslich aus 23) und 24)

$$\left.\begin{aligned}B_5[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2] = -\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{m^2}\,8\,.\,D_1\{&\overline{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2}-\\ -(&\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\overline{\mathfrak{y}^2}^2+\overline{\mathfrak{z}^2}^2+2\,(2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2)+\\ &+2\,(2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2)+2\,(2\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2))\}\end{aligned}\right\} 25)$$

Es wären somit die Ausdrücke $B_5(\Pi_4)$, $B_5[\Pi_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)]$ und $B_5[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2]$ berechnet und damit die Aufgabe gelöst, $B_5(G_4)$, wenn G_4 eine ganze homogene Function 4. Grades ist, zu bestimmen.

Es dürfte nicht allzu schwierig sein, die Gesetzmässigkeit der Coëfficienten in den Ausdrücken 11), 21) und 25) aufzufinden; da diese ganzen Rechnungen jedoch nur Mittel zum Zwecke sind, habe ich mich dieser Mühe nicht unterzogen, die sich wohl nur lohnen dürfte, wenn man sich dadurch bei Berechnung des B_5 von Functionen höherer Ordnung Vereinfachungen schaffen kann.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Dagegen erscheint es interessant, dass die hier gewonnenen Resultate im Widerspruche stehen mit einer Anmerkung Maxwell's in seiner Abhandlung »On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature«. Er sagt dort: »I have recently applied the method of spherical harmonics, as described in the notes to sections (1) and (5), to carrying the approximations two orders higher. I expected that this would have involved the calculation of two new quantities, namely, the rates of decay of spherical harmonics of the fourth and sixth orders, but I found that, to the order of approximation required, all harmonics of the fourth and sixth orders may be neglected, so that the rate of decay of harmonics of the second order, the time-modulus of which is $\frac{\mu}{p}$, determines the rate of decay of all functions of less than 6 dimensions«.

Aus unseren Rechnungen dagegen ergibt sich, dass für Functionen 4. Ordnung eine bestimmte Relexationszeit[1] (time-modulus of relaxation) gar nicht existirt, da in den für B_5 erhaltenen Ausdrücken ausser dem Mittelwerth der betreffenden Function noch andere Glieder vorkommen.

Es ist wahrscheinlich, dass Maxwell diese Rechnungen nicht in extenso durchgeführt hat und seinen obigen Ausspruch nur auf einen vorläufigen Überschlag gründete.

Über die Bedeutung und Berechnung siehe Boltzmann, l. c. S. 165.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 105_2a

Autor(en)/Author(s): Benndorf Hans

Artikel/Article: Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwellsehen Gastheorie 646-666