©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen

Karl Carda in Brünn.

Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \psi(x, y, z) \\ z' &= \chi(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei φ, ψ, χ unabhängige Functionen der Argumente x, y, z bedeuten, wird eine Punkttransformation des Raumes (x, y, z) bestimmt. Wir können die Frage aufwerfen, wann die Transformationen (1) alle Flächeninhalte invariant lassen. Nach einem allgemeinen Princip Lie's folgt dann, dass die Transformationen (1) eine Gruppe bilden.

Wir können unsere Fragestellung in einfacher Weise erledigen, wenn wir eine von Herrn C. Neumann mitgetheilte Formel heranziehen. Im Punkte x, y, z construiren wir ein Flächenelement, dessen Normale die Richtungscosinus a, b, c besitzt. Der Flächeninhalt desselben sei ds. Vermöge (1) geht x, y, z in x', y', z'; a, b, c in a', b', c' und ds in ds' über. Die erwähnte Formel lautet dann:

$$\frac{ds'}{ds} = -\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & \alpha \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & \beta \\ \chi_x & \chi_y & \chi_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wobei die partiellen Ableitungen in bekannter Weise bezeichnet sind.[1]

Um zu bestimmen, wie a, b, c transformirt werden, legen wir durch das erste Flächenelement eine Fläche, welche dann vermöge (1) in eine Fläche durch das zweite Flächenelement übergeht. Es bestehen daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \\ dz' - p'\,dx' - q'\,dy' &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Um die Rechnung elegant zu gestalten, behalten wir die Cartesischen Punktcoordinaten x, y, z bei, ersetzen aber p und q durch homogene Coordinaten:

$$p \equiv -\frac{p_1}{p_3}, \qquad q \equiv -\frac{p_2}{p_3}.$$

Wir erhalten somit aus (3)

$$\begin{aligned} p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz &= 0 \\ p_1' dx' + p_2' dy' + p_3' dz' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus diesem System erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (1), indem wir noch über einen Factor passend verfügen, die Formeln:

$$\begin{aligned} p_1' &= \begin{vmatrix} p_1 & \psi_x & \chi_x \\ p_2 & \psi_y & \chi_y \\ p_3 & \psi_z & \chi_z \end{vmatrix}, \\ p_2' &= \begin{vmatrix} \varphi_x & p_1 & \chi_x \\ \varphi_y & p_2 & \chi_y \\ & p_3 & \chi_z \end{vmatrix}, \\ p_3' &= \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x & p_1 \\ \varphi_y & \psi_y & p_2 \\ \varphi_z & \psi_z & p_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

[1] Carl Neumann, Zwei Sätze über correspondirende Flächenelemente. Berichte der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1876, S. 253—255, oder Math. Annalen, Bd. 11, S. 306—308.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Setzen wir in (2)

$$\frac{ds'}{ds} = 1$$

und drücken wir $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ in bekannter Weise durch $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$ aus, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & p_1' \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & p_2' \\ \chi_x & \chi_y & \chi_z & p_3' \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}^2 = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2). \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind die Definitionsgleichungen der gesuchten Gruppe.

Entwickeln wir die Determinante in (6) nach den Elementen der letzten Colonne, so erhalten wir die einfache Beziehung

$$p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2. \quad (7)$$

Hieraus folgt:

Die Coordinaten p_1, p_2, p_3 werden von der gesuchten Gruppe orthogonal transformirt.

Statt der durch die Gleichungen (5) bestimmten Transformation T der Coordinaten p_1, p_2, p_3 betrachten wir die zu ihr inverse T^{-1}, welche gleichfalls orthogonal ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi_x p_1' + \psi_x p_2' + \chi_x p_3' \\ p_2 &= \varphi_y p_1' + \psi_y p_2' + \chi_y p_3' \\ p_3 &= \varphi_z p_1' + \psi_z p_2' + \chi_z p_3'. \end{aligned} \quad (8)$$

Bezeichnet man mit q_1', q_2', q_3' die Coordinaten eines zweiten durch den Punkt x', y', z' gelegten Flächenelementes, so geht dieses vermöge T^{-1} in ein Flächenelement q_1, q_2, q_3 durch den Punkt x, y, z über. Durch eine einfache Rechnung erkennt man das Bestehen der Gleichung

$$p_1'q_1' + p_2'q_2' + p_3'q_3' = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3. \quad (9)$$

Hieraus schliesst man mit Rücksicht auf die Gleichung (7):

Die gesuchte Gruppe des Raumes ist conform.

Jede conforme Transformation des Raumes führt aber Kugel in Kugel über.[1] Unsere Gruppe soll alle Flächeninhalte invariant lassen. Hieraus folgt:

Die gesuchte Gruppe führt Kugeln in congruente Kugeln über.

Hiemit ist das Ziel unserer Betrachtungen erreicht.

Theorem I: Die einzigen Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen, sind die Bewegungen desselben.

Corollar: Die Bewegungen des Raumes lassen sich als die Punkttransformationen des Raumes definiren, welche alle Flächeninhalte invariant lassen.

Wir fügen noch das folgende Theorem hinzu, unterdrücken jedoch den einfachen Beweis.

Theorem II: Die einzigen Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte nach constantem Verhältniss ändern, sind die Ähnlichkeitstransformationen desselben.

Zwei andere Beweise des ersten Theorems werde ich in den Monatsheften für Mathematik und Physik veröffentlichen.

---

[1] Über die interessanten conformen Transformationen des Raumes vergleiche man Lie, Geometrie der Berührungstransformationen. Erster Band, Leipzig, 1896, 10. Capitel.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 105_2a

Autor(en)/Author(s): Carda Karl

Artikel/Article: Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen 787-790