Über relative Flächentheorie

Von Adalbert Duschek in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Jänner 1926)

Unter relativer Flächentheorie ist die von Herrn Emil Müller¹ begründete Differentialgeometrie der Flächen bezüglich einer Eichfläche (im Sinne Minkowskis) verstanden. Es handelt sich dabei darum, daß an Stelle der Kugelmannigfaltigkeit die ∞^4 Flächen betrachtet werden, die aus der Eichfläche e = e(u, v) durch die zentrischen Ähnlichkeiten

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{a} + R\mathbf{e} \tag{1}$$

hervorgehen. Man nennt $\mathfrak a$ den Mittelpunkt und R den Radius der Fläche ($\mathfrak e$); insbesondere hat die Eichfläche ($\mathfrak e$) den Radius 1 und den Ursprung zum Mittelpunkt. Ich wiederhole gleich an dieser Stelle noch einige weitere, für das Folgende wichtige Begriffe. Die Tangentialebene in einem Punkt von ($\mathfrak e$) heißt relativnormal zum Ortsvektor $\mathfrak e$ des Berührungspunktes. In der Tangentialebene selbst werden die konjugierten Richtungen als relativnormal bezeichnet. Dieser Orthogonalitätsbegriff läßt sich — im allgemeinen natürlich nicht eindeutig² — mittels der Transformationen (1) auf den ganzen Raum übertragen. Unter den relativisotropen Richtungen in einer Ebene sind demgemäß die Doppelstrahlen der Involution relativnormaler Strahlen zu verstehen, also die Asymptotenrichtungen der Eichfläche in jenem Punkt, dessen Tangentialebene parallel zur gegebenen Ebene ist.

Im folgenden werden zunächst einige Formeln für die Relativkrümmungen einer Fläche entwickelt. Dann werden die Relativminimalflächen als Extremalen eines Variationsproblems eingeführt und gezeigt, daß sie mit den von Herrn E. Müller so benannten Flächen identisch sind.³ Des weiteren wird die Frage gelöst, für welche Eichflächen die relativen Minimalflächen Schiebflächen relativisotroper Kurven sind. Die Fragestellung war naheliegend, da neben den gewöhnlichen auch die Minimalflächen bezüglich

Relative Minimalflächen. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXI, 1921, p. 3 bis 19. Im folgenden zitiert mit R. M.

² Nähere Ausführungen in R. M., p. 4.

³ Diese Aufgabe wurde nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn E. Müllen bereits vor einigen Jahren von J. Radon in einem in der mathem. Gesellschaft in Wien gehaltenen Vortrag behandelt.

Vgl. auch Blaschke, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 31 (1922), p. 41 und Differentialgeometrie II, p. 205.

eines Drehparaboloides derartige Flächen sind.¹ Es zeigt sich, daß dasselbe für alle Flächen zweiter Ordnung gilt. Zum Schluß gebe ich noch einen einfachen Beweis des Satzes von der Starrheit der Eiflächen.

1. Sei $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}\,(u,v)$ eine beliebige analytische Fläche, $\mathfrak{e}=\mathfrak{e}\,(u,v)$ die gleichfalls analytische Eichfläche. Die Parameter seien so gewählt, daß in Punkten mit gleichen Parameterwerten die Tangentialebenen von (\mathfrak{x}) und (\mathfrak{e}) parallel sind. Man kann demzufolge

$$\mathfrak{g}_{u} = a \, \mathfrak{e}_{u} + b \, \mathfrak{e}_{v},
\mathfrak{g}_{v} = c \, \mathfrak{e}_{u} + d \, \mathfrak{e}_{v}$$
(2)

setzen; durch die vier Funktionen a, b, c, d sind sämtliche Beziehungen zwischen den beiden Flächen bestimmt. Bezeichnen wir die Koeffizienten der zweiten Grundformen von (\mathfrak{e}) und (\mathfrak{x}) mit L, M, N, beziehungsweise L', M', N', so folgt durch Differentiation von (\mathfrak{d}) und darauffolgende skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$

$$L' = a L + b M,$$

 $M' = a M + b N = c L + d M,$ (3)
 $N' = c M + d N.$

Die vier Funktionen a, b, c, d sind also nicht unabhängig, sondern genügen der Beziehung

$$Lc + (d - a) M - b N = 0.$$
 (3')

Den Vektor e wird man entsprechend als Relativnormalenvektor bezeichnen. Die Eichfläche (e) selbst ist das Analogon zum sphärischen Bild der elementaren Flächentheorie.

Die Relativkrümmungslinien lassen sich auch hier auf drei Arten definieren: als Ort der stationär, d. h. auch noch in einem Nachbarpunkt berührenden Flächen (1), ferner als jene Kurven auf (\mathfrak{x}), längs welcher die Relativnormalen eine Torse bilden, oder schließlich als das zugleich konjugierte und relativnormale Kurvennetz von (\mathfrak{x}).

Auf Grund sowohl der ersten wie auch der zweiten Definition muß neben

$$y = a + Re$$

auch

$$g + dg = a + R(e + de)$$

sein. Durch Subtraktion folgt

$$d \, \mathfrak{x} = R \, d \, \mathfrak{e}, \tag{4}$$

¹ R. M., p. 12.

die Formel von O. Rodriguez der elementaren Differentialgeometrie. Ausführlicher ist (4)

$$\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv = R(\mathfrak{e}_u du + \mathfrak{e}_v dv).$$

Multipliziert man hier skalar einmal mit $\mathfrak{p} \times \mathfrak{e}_{u}$, einmal mit $\mathfrak{p} \times \mathfrak{e}_{v}$, wo \mathfrak{p} ein willkürlicher Vektor ist, für den nur $(\mathfrak{p} \, \mathfrak{e}_{u} \, \mathfrak{e}_{v}) \, \pm \, 0$ gilt, so folgt

$$(\mathfrak{p} e_n \mathfrak{x}_n) d u + (\mathfrak{p} e_n \mathfrak{x}_v) d v = R (\mathfrak{p} e_n e_v) d v,$$

$$(\mathfrak{p} e_v \mathfrak{x}_n) d u + (\mathfrak{p} e_v \mathfrak{x}_v) d v = -R (\mathfrak{p} e_u e_v) d u.$$
(5)

Eliminiert man R, so erhält man die Differentialgleichung der Relativkrümmungslinien

$$(\mathfrak{p} \, e_u \, \mathfrak{x}_u) \, d \, u^2 + [(\mathfrak{p} \, e_u \, \mathfrak{x}_v) \, + (\mathfrak{p} \, e_v \, \dot{\mathfrak{x}}_u)] \, d \, u \, d \, v + (\mathfrak{p} \, e_v \, \mathfrak{x}_v) \, d \, v^2 = 0. \tag{6}$$

Es gibt somit in jedem Punkt von (y) zwei stationär berührende Flächen (3), die Hauptflächen. Ihre Radien R_1 und R_2 berechnen sich aus der quadratischen Gleichung

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v) - R\left[(\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_u\,\mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{e}_v)\right] + R^2\left(\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_u\,\mathfrak{e}_v\right) \equiv 0,\tag{7}$$

die sich aus (5) durch Elimination von du und dv unter Berücksichtigung der Relation

$$(\mathfrak{p} e_{n} \mathfrak{x}_{n}) (\mathfrak{p} e_{v} \mathfrak{x}_{v}) - (\mathfrak{p} e_{n} \mathfrak{x}_{v}) (\mathfrak{p} e_{v} \mathfrak{x}_{n}) = (\mathfrak{p} e_{n} e_{v}) (\mathfrak{p} \mathfrak{x}_{n} \mathfrak{x}_{v})$$

Die Ausdrücke

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{(\mathfrak{p} \, \mathfrak{e}_u \, \mathfrak{e}_v)}{(\mathfrak{p} \, \mathfrak{x}_u \, \mathfrak{x}_v)} \tag{8}$$

und

ergibt.

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{(\mathfrak{p} \, \mathfrak{e}_n \, \mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{p} \, \mathfrak{x}_n \, \mathfrak{e}_v)}{2 \, (\mathfrak{p} \, \mathfrak{x}_n \, \mathfrak{x}_v)} \tag{9}$$

werden beziehungsweise als Relativkrümmung und mittlere Relativkrümmung bezeichnet. Ihre Abhängigkeit von p ist nur eine scheinbare, wie man auf Grund von (2) leicht erkennt. Nimmt man für (e) die Einheitskugel, so ergeben sich mittels der Weingarten'schen Gleichungen ohne Schwierigkeit aus (6) bis (9) die gebräuchlichen Formeln der elementaren Flächentheorie.

Eine bemerkenswert einfache Gestalt nehmen (6) bis (9) an, wenn man die durch (2) definierten Funktionen a, b, c, d heranzieht, nämlich

$$b d u^2 + (d - a) d u d v - c d v^2 = 0, (6')$$

eines Drehparaboloides derartige Flächen sind.¹ Es zeigt sich, daß dasselbe für alle Flächen zweiter Ordnung gilt. Zum Schluß gebe ich noch einen einfachen Beweis des Satzes von der Starrheit der Eiflächen.

1. Sei $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u,v)$ eine beliebige analytische Fläche, $\mathfrak{e}=\mathfrak{e}(u,v)$ die gleichfalls analytische Eichfläche. Die Parameter seien so gewählt, daß in Punkten mit gleichen Parameterwerten die Tangentialebenen von (\mathfrak{x}) und (\mathfrak{e}) parallel sind. Man kann demzufolge

$$\mathfrak{x}_{n} = a \, \mathfrak{e}_{n} + b \, \mathfrak{e}_{v},
\mathfrak{x}_{v} = c \, \mathfrak{e}_{n} + d \, \mathfrak{e}_{v}$$
(2)

setzen; durch die vier Funktionen a, b, c, d sind sämtliche Beziehungen zwischen den beiden Flächen bestimmt. Bezeichnen wir die Koeffizienten der zweiten Grundformen von (\mathfrak{e}) und (\mathfrak{x}) mit L, M, N, beziehungsweise L', M', N', so folgt durch Differentiation von (2) und darauffolgende skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$

$$L' = aL + bM,$$

$$M' = aM + bN = cL + dM,$$

$$N' = cM + dN.$$
(3)

Die vier Funktionen a, b, c, d sind also nicht unabhängig, sondern genügen der Beziehung

$$Lc + (d - a) M - b N = 0.$$
 (3')

Den Vektor e wird man entsprechend als Relativnormalenvektor bezeichnen. Die Eichfläche (e) selbst ist das Analogon zum sphärischen Bild der elementaren Flächentheorie.

Die Relativkrümmungslinien lassen sich auch hier auf drei Arten definieren: als Ort der stationär, d. h. auch noch in einem Nachbarpunkt berührenden Flächen (1), ferner als jene Kurven auf (\mathfrak{x}) , längs welcher die Relativnormalen eine Torse bilden, oder schließlich als das zugleich konjugierte und relativnormale Kurvennetz von (\mathfrak{x}) .

Auf Grund sowohl der ersten wie auch der zweiten Definition muß neben

$$g = a + Re$$

auch

$$g + dg = a + R(e + de)$$

sein. Durch Subtraktion folgt

$$d \, \mathfrak{x} = R \, d \, \mathfrak{e}, \tag{4}$$

¹ R. M., p. 12.

die Formel von O. Rodriguez der elementaren Differentialgeometrie. Ausführlicher ist (4)

$$\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv = R(\mathfrak{e}_u du + \mathfrak{e}_v dv).$$

Multipliziert man hier skalar einmal mit $\mathfrak{p} \times \mathfrak{e}_u$, einmal mit $\mathfrak{p} \times \mathfrak{e}_v$, wo \mathfrak{p} ein willkürlicher Vektor ist, für den nur $(\mathfrak{p} \, \mathfrak{e}_u \, \mathfrak{e}_v) \, \pm \, 0$ gilt, so folgt

$$(\mathfrak{p} e_{n} \mathfrak{x}_{n}) d u + (\mathfrak{p} e_{n} \mathfrak{x}_{v}) d v = R (\mathfrak{p} e_{n} e_{v}) d v,$$

$$(\mathfrak{p} e_{v} \mathfrak{x}_{u}) d u + (\mathfrak{p} e_{v} \mathfrak{x}_{v}) d v = -R (\mathfrak{p} e_{u} e_{v}) d u.$$
(5)

Eliminiert man R, so erhält man die Differentialgleichung der Relativkrümmungslinien

$$(\mathfrak{p} \, e_u \, \mathfrak{x}_u) \, d \, u^2 + [(\mathfrak{p} \, e_u \, \mathfrak{x}_v) \, + (\mathfrak{p} \, e_v \, \dot{\mathfrak{x}}_u)] \, d \, u \, d \, v + (\mathfrak{p} \, e_v \, \mathfrak{x}_v) \, d \, v^2 = 0. \tag{6}$$

Es gibt somit in jedem Punkt von (y) zwei stationär berührende Flächen (3), die Hauptflächen. Ihre Radien R_1 und R_2 berechnen sich aus der quadratischen Gleichung

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v) - R\left[(\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_u\,\mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{e}_v)\right] + R^2\left(\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}_u\,\mathfrak{e}_v\right) \equiv 0,\tag{7}$$

die sich aus (5) durch Elimination von du und dv unter Berücksichtigung der Relation

$$(\mathfrak{p} e_n \mathfrak{x}_n) (\mathfrak{p} e_v \mathfrak{x}_v) - (\mathfrak{p} e_n \mathfrak{x}_v) (\mathfrak{p} e_v \mathfrak{x}_n) = (\mathfrak{p} e_n e_v) (\mathfrak{p} \mathfrak{x}_n \mathfrak{x}_v)$$

Die Ausdrücke

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{(\mathfrak{p} e_u e_v)}{(\mathfrak{p} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)} \tag{8}$$

und

ergibt.

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{(\mathfrak{p} \, e_u \, \mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{p} \, \mathfrak{x}_u \, e_v)}{2 \, (\mathfrak{p} \, \mathfrak{x}_u \, \mathfrak{x}_v)} \tag{9}$$

werden beziehungsweise als Relativkrümmung und mittlere Relativkrümmung bezeichnet. Ihre Abhängigkeit von p ist nur eine scheinbare, wie man auf Grund von (2) leicht erkennt. Nimmt man für (e) die Einheitskugel, so ergeben sich mittels der Weingarten'schen Gleichungen ohne Schwierigkeit aus (6) bis (9) die gebräuchlichen Formeln der elementaren Flächentheorie.

Eine bemerkenswert einfache Gestalt nehmen (6) bis (9) an, wenn man die durch (2) definierten Funktionen a, b, c, d heranzieht, nämlich

$$b d u^{2} + (d - a) d u d v - c d v^{2} = 0, (6')$$

Unter der Annahme, daß die Verschiebung $\delta \, \mathfrak{x}$ längs der Randkurve des betrachteten Bereiches verschwindet, wird

$$\delta o = 2 \iint H \left(\delta \, \mathfrak{x} \, \mathfrak{x}_{u} \, \mathfrak{x}_{v} \right) \, d \, u \, d \, v. \tag{13}$$

Für die Extremalen des Variationsproblems der Relativoberfläche ergibt sich also aus $\delta o = 0$ die Bedingung H = 0 oder

$$\mathbf{e}_{n} \times \mathbf{g}_{\nu} = \mathbf{e}_{\nu} \times \mathbf{g}_{n}. \tag{14}$$

Die der Relation (14) genügenden Flächen (\mathfrak{x}) werden als Relativminimalflächen bezüglich der Eichfläche (\mathfrak{x}) bezeichnet.¹ Gleichung (14) ist wegen (2) und (9') äquivalent mit

$$a + d = 0.$$
 (14')

Für die bilineare Invariante der zweiten Grundformen der Flächen (e) und (g) ergibt sich nach (3)

$$LN' - 2MM' + NL' = (LN - M^2)(a + d);$$

die beiden Formen sind also apolar für Relativminimalflächen. Ihre Asymptotenrichtungen trennen sich harmonisch oder, anders ausgedrückt, die relativisotropen Kurven von (\mathfrak{x}) bilden ein konjugiertes Netz.²

Aus (14) folgt noch, daß auch (e) Relativminimalfläche bezüglich (\mathfrak{x}) ist.

3. Es soll nun die Fläche (x) Schiebfläche relativisotroper Kurven sein. Bezieht man (e) auf Asymptotenparameter, so muß dann notwendig

$$\mathfrak{z}_{uv} = 0 \tag{15}$$

sein, d. h. die Parameterlinien von (y) müssen mit den Schiebkurven übereinstimmen. Aus (3) folgt wegen L=N=0 und M'=0

$$a = d = 0. ag{16}$$

² R. M., p. 5 und 15.

¹ Die übrigen, von W. Blaschke l.c. p. 1 angegebenen Beziehungen, nämlich daß sich die Relativoberfläche einer Relativminimalfläche durch das Randintegral $\frac{1}{2} \oint (\mathbf{x} \ d \, \mathbf{x} \ \mathbf{c})$ darstellen läßt und daß die Relativminimalflächen auch dadurch gekennzeichnet sind, daß auf ihnen die Integrale $\int \mathbf{e} \times d \, \mathbf{x}$ und $\int \mathbf{x} \times d \, \mathbf{e}$ nicht vom Weg abhängen, lassen sich auf Grund von (14) fast ohne Rechnung nachweisen.

Nach (14') ist (y) somit Relativminimalfläche bezüglich (e). Differenziert man die erste Gleichung (2) nach v, die y zweite nach u, so erhält man wegen (15) und (16)

$$b_v e_v + b e_{vv} \equiv 0,$$

$$c_u e_u + c e_{uu} \equiv 0,$$
(17)

oder

$$\frac{\partial}{\partial v} (b e_v) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} (c e_u) = 0$$
(18)

ist. Diese Gleichungen besagen aber, daß die Richtungen der Vektoren e_u und e_v längs der Kurven v = konst., beziehungsweise u = konst. fest sind. Die Fläche (e) besitzt also zwei Scharen geradliniger Erzeugender und ist somit eine Fläche zweiter Ordnung.

Ist also (x) Schiebfläche relativisotroper Kurven, so ist sie auch Relativminimalfläche und die Eichfläche (e) ist eine Fläche zweiten Grades.

Dieser Satz ist umkehrbar, d. h. es gilt auch: Jede Relativminimalfläche bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung ist Schiebfläche relativisotroper Kurven.

Sei zum Beweis (e) die auf Asymptotenparameter bezogene Eichfläche zweiter Ordnung. Die Vektoren e_u und e_v sind längs der Erzeugenden v = konst., beziehungsweise u = konst. von fester Richtung, so daß man

$$\mathbf{e}_{nn} = r \, \mathbf{e}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{vv} = s \, \mathbf{e}_v \tag{19}$$

setzen kann. Durch Differentiation von (2) nach v und u erhält man wegen (19)

$$\xi_{nv} = a \, e_{nv} + a_v \, e_n + (b \, s + b_v) \, e_v =
= d \, e_{nv} + (c \, r + c_n) \, e_n + d_n \, e_v,$$
(20)

und daraus, da (\mathfrak{x}) Relativminialfläche ist und somit (14') gilt, durch Addition

$$2 g_{uv} = (c r + a_v + c_u) e_u + (b s + b_v + d_u) e_v.$$
 (21)

Multipliziert man die drei Gleichungen (20) und (21) skalar mit $e_u \times e_v$, so folgt

$$(\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{e}_u\,\mathfrak{e}_v)=a\,M=d\,M=0,$$

also, da $M \neq 0$ ist, a = d = 0. Die Gleichungen (20) erhalten die Form

$$\mathfrak{x}_{nv} = (b s + b_v) \mathfrak{e}_v = (c r + c_n) \mathfrak{e}_n,$$

weshalb

$$(b s + b_v) = (c r + c_u) = 0$$

und somit

$$\mathfrak{x}_{uv}=0$$

sein muß.

4. Die Gleichung (14) läßt noch eine zweite Deutung zu. Sie ist nämlich die notwendige und hinreichende Bedingung, daß etwa der Vektor $\mathfrak x$ der Drehvektor einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche (e) ist. Auf diese Tatsache ist der Weyl'sche Beweis des Satzes von der Starrheit der Eiflächen gegründet.

Weyl zeigt nämlich, daß die Forderung, daß \mathfrak{x} eine in allen Punkten der als Eifläche angenommenen Fläche (e) analytische Funktion sein soll, nur durch $\mathfrak{x}=$ konst. zu erfüllen ist.

Dieser Nachweis läßt sich nun mittels der Sätze aus Nr. 3 erheblich abkürzen. Zunächst folgt aus H=0, daß die Fläche (\mathfrak{x}) negative Relativkrümmung hat, und daraus wegen der eben erwähnten Sätze, daß die (gewöhnliche) Gauß'sche Krümmung von (\mathfrak{x}) überall negativ ist, wenn (\mathfrak{e}) eine Eifläche, also in allen Punkten positiv gekrümmt ist. Wegen der ein-eindeutigen und stetigen Abbildung von (\mathfrak{x}) auf (\mathfrak{e}) folgt, daß jeder geschlossenen Kurve auf (\mathfrak{e}) eine ebenfalls geschlossene Kurve auf (\mathfrak{x}) entsprechen muß. Die Fläche (\mathfrak{x}) ist somit eine singularitätenfreie geschlossene Fläche (vom Zusammenhang der Kugel) von durchaus negativer Krümmung. Aus der Unmöglichkeit derartiger Flächen folgt aber sofort, daß der Vektor \mathfrak{x} konstant sein muß.

Man könnte natürlich auch umgekehrt vorgehen und aus der Konstanz von $\mathfrak x$ auf die Unmöglichkeit von Flächen durchaus negativer Krümmung schließen. Nimmt man nämlich an, daß $(\mathfrak x)$ eine derartige Fläche sei, so hat jede Relativminimalfläche bezüglich $(\mathfrak x)$, also auch $(\mathfrak e)$ durchaus positive Krümmung. Wegen der Geschlossenheit von $(\mathfrak x)$ muß $(\mathfrak e)$ Eifläche sein. Dann ist aber nach Weyl und Blaschke $\mathfrak x$ konstant, so daß die Annahme einer singularitätenfreien geschlossenen Fläche durchaus negativer Krümmung auf einen Widerspruch führt.

¹ Berl. Sitz. Ber. 1917, p. 250. Vergleiche auch den Beweis von W. Blaschke, Math. Zeitschr. 9 (1921), p. 142, und Differentialgeometrie I, p. 131.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: <u>Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften</u> mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: 135_2a

Autor(en)/Author(s): Duschek Adalbert

Artikel/Article: Über relative Flächentheorie. 1-8