Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Vergleich zwischen den Dispersionsformeln der Atomtheorie und der Kontinuitätstheorie

Von

Ing. Dr. Fr. Hlučka

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Dezember 1925)

Einleitung.

Die Entdeckung der anomalen Dispersion (Le Roux, 1862, Christiansen, 1870) hatte, wie jedes Phänomen, das zu einer Wandlung, beziehungsweise Modifikation der bisherigen Anschauungen nötigt, eine große Zahl experimenteller und theoretischer Untersuchungen im Gefolge. Von mechanisch-elastischen Vorstellungen ging man bald zur elektromagnetischen Behandlungsweise über und es zeigte sich, daß die der Erfahrung genügende Dispersionsformel im wesentlichen (in den Gebieten sehr kleiner Absorption) die Form hat

$$n^2 = 1 + \Sigma \frac{K\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \quad \text{oder auch} \quad n^2 - n_0^2 = \Sigma \frac{K'}{\lambda^2 - \lambda_0^2},$$

wobei die Konstantenbeziehung besteht

$$K' = K\lambda_0^2, \quad n_0^2 = 1 + \Sigma K.$$

Aus den Werten dieser formalen Konstanten n_0^2, λ_0, K konnte man dann versuchen, die in ihnen enthaltenen Faktoren, der jeweiligen Theorie entsprechend, zahlenmäßig auszuwerten. Diese Berechnung kommt erst in zweiter Linie in dieser Arbeit in Betracht, die sich vor allem das Ziel setzt, die richtige Bestimmung der Konstanten n_0^2, λ_0, K nochmals zu untersuchen aus Gründen, die sich in der folgenden Darstellung als zwingend erweisen werden.

Die unabhängige Bestimmung dieser Konstanten wurde von vornherein durch zwei Umstände beeinflußt, einmal durch die theoretische Gleichsetzung des Quadrates des Brechungsindex für unendlich lange Wellen n_0^2 mit der Dielektrizitätskonstante ε, dann durch die Gleichsetzung der Wellenlänge der 1897 entdeckten Reststrahlen mit der Eigenwellenlänge λ_0. Die erstere, theoretisch geforderte Übereinstimmung ließ sich leicht kontrollieren, da man den Brechungsexponenten im Gebiete der langen elektrischen Wellen messen konnte. Die zweite experimentelle Beobachtung der Reststrahlen war aber umgekehrt theoretisch zu rechtfertigen, d. h. die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Theorie mußte den richtigen Wert der Wellenlänge des Reflexionsmaximums ergeben. Statt dessen ging man umgekehrt vor und führte die Reststrahlenwellenlänge λ_R als Eigenwellenlänge in die Dispersionsgleichung ein. Da zeigte sich aber, daß die den Wert von λ_R als λ_0 enthaltende Dispersionsformel die Beobachtungen nur schlecht wiedergeben konnte. Rubens (Ann. d. Phys., *26*, 1908) konstatierte, daß λ_0 bei größerer Wellenlänge liegen müsse, glaubte aber die Abweichung durch den Abfall der Energiekurve der Strahlungsquelle nach längeren Wellen erklären zu können. Paschen (Ann. d. Phys., *26*, 1908) mußte feststellen, daß (für NaCl und CaF_2) nicht einmal die Annahme einer zweiten Eigenwellenlänge neben λ_R (also ein Plus von zwei Konstanten) die Beobachtungen so gut wiederzugeben vermöge als eine von λ_R etwas abweichende Eigenschwingung. Trotzdem diese Tatsache zu weiteren experimentellen und theoretischen Untersuchungen hätte anregen sollen, findet sich in der Literatur der letzten 20 Jahre relativ wenig, was zur Lösung dieser Schwierigkeit beitragen könnte. K. Försterling (Ann., *61*, 1920) hat theoretisch das Verhältnis der Wellenlängen des Reflexionsmaximums und der Eigenschwingung auf Grund der üblichen Dispersionstheorie untersucht und die Abweichung des mit Hilfe der Dispersionskurve bestimmten Wertes λ_0 von λ_R quantitativ richtig bestätigt gefunden. Auch die Born-Kármán'sche Theorie der Krystallgitter führt, wie F. zeigt, auf ähnliche λ_0-Werte. Damit könnte man die Frage als gelöst betrachten, wenn nicht zwei andere Theorien früher schon Dispersionsformeln entwickelt hätten, deren λ_0 nicht größer, sondern kleiner als λ_R ist. Dies sind auf atomistischer Basis die zu formal demselben Resultate führenden Theorien von Planck (Berl. Ber., 1902) und Goldhammer (Math.-phys. Schriften, Bd. 16), nach deren Dispersionsformel

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \Sigma g \frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}, \text{ beziehungsweise } \frac{n^2-1}{n^2+2} = \mathfrak{k} + \frac{K}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

das λ_0 einen merklich kleineren Wert besitzt als λ_R. Ist man also einmal davon abgekommen, λ_R mit λ_0 zu identifizieren, so scheint die Entscheidung zwischen diesen zwei gegensätzlichen Ergebnissen nur mehr auf rein theoretischem Wege möglich zu sein, wie dies in Goldhammer's Dispersionstheorie zum Ausdruck kommt.

Die andere der erwähnten Dispersionstheorien steht nun auf der der atomistischen Hypothese völlig konträren Grundlage, sie folgt aus der elektromagnetischen Theorie G. Jaumann's (Wiener Ber., 1908), der die Kontinuität aller materiellen und Strahlungserscheinungen theoretisch begründet hat. Seine Dispersionsformel in der Gestalt

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \Sigma \frac{K}{\lambda_0^2-\lambda^2}$$

ergibt für λ_0 einen kleineren Wert als λ_R, stimmt also (allerdings nur) in dieser Hinsicht mit der neueren Entwicklung der atomistischen Dispersionstheorie überein. Er selbst hat aber stets an der Identität der Rubens'schen Reststrahlen mit der Reflexion am Orte der Eigenschwingung festgehalten. Prof. Jaumann, dessen Assistent ich mehrere Jahre bis zu seinem im Vorjahre plötzlich erfolgten Tode sein durfte, hat mich auf den Umstand aufmerksam gemacht, daß nach seiner Theorie der Brechungsindex am Orte der Eigenschwingung gleich Null, die Geschwindigkeit im dispergierenden Medium also unendlich, nach der üblichen atomistischen Theorie dagegen $n = \infty$, also die Geschwindigkeit gleich Null werde; ferner darauf, daß jene Theorie ein von λ_R abweichendes λ_0 einzuführen gezwungen sei, während es ihm gelang, mit dem genauen Wert λ_R, allerdings unter Aufgeben der Beziehung $n_0^2 = \varepsilon$ (welche ja nur dann gilt, wenn jenseits der größten Wellenlänge, mit welcher n und ε gemessen werden, keine Eigenschwingung mehr liegt, was man aber nicht mit Sicherheit behaupten kann), eine gute Wiedergabe zu erzielen. Ich unternahm also den Versuch, eine Entscheidung in dieser Frage herbeizuführen.

Zunächst kam es darauf an, die Ursache zu finden, warum die in ihren theoretischen Grundlagen und ihrer äußeren Form so verschiedenen Dispersionsformeln eine gleich gute Anpassung an die Dispersionskurve überhaupt gestatten. Dies muß in ihrer mathematischen Form begründet sein. Diese Untersuchung ist im folgenden Abschnitt durchgeführt und zeigt die mathematisch-formale Gleichwertigkeit der drei in Betracht kommenden Dispersionsformeln, wobei besonders zwischen der Jaumann'schen und der älteren Gleichung $n^2 - n_0^2 = \Sigma \frac{K}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$ eine einfache Beziehung besteht, welch letztere Formel nur der Kürze halber im folgenden als die Drude'sche bezeichnet sei. Nur für diese und die Jaumann'sche Formel werden daher die folgenden quantitativen Entwicklungen ausführlich durchgeführt werden.

Es sei aber noch zuvor darauf hingewiesen, daß ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Ausgangsgleichungen beider Theorien besteht. In der Atomistik findet die Verknüpfung der elektromagnetischen Gleichungen mit der Schwingungsgleichung (des Ions, beziehungsweise des elektrischen Resonators) durch Fluxionsglieder (des elektrischen Vektors und der Verschiebung des Ions, beziehungsweise des Resonatormoments) statt. Die Kontinuitätstheorie dagegen verknüpft die elektromagnetischen mit den stofflichen Gleichungen durch Derivationsglieder (des elektrischen Vektors und der stofflichen Variablen). Die Erweiterung, welche die elektromagnetischen Gleichungen damit erfahren, spielt auch in der Kontinuitätstheorie der elektrischen Longitudinalstrahlen eine wichtige Rolle.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Theorie mußte den richtigen Wert der Wellenlänge des Reflexionsmaximums ergeben. Statt dessen ging man umgekehrt vor und führte die Reststrahlenwellenlänge λ_R als Eigenwellenlänge in die Dispersionsgleichung ein. Da zeigte sich aber, daß die den Wert von λ_R als λ_0 enthaltende Dispersionsformel die Beobachtungen nur schlecht wiedergeben konnte. Rubens (Ann. d. Phys., *26*, 1908) konstatierte, daß λ_0 bei größerer Wellenlänge liegen müsse, glaubte aber die Abweichung durch den Abfall der Energiekurve der Strahlungsquelle nach längeren Wellen erklären zu können. Paschen (Ann. d. Phys., *26*, 1908) mußte feststellen, daß (für NaCl und CaF_2) nicht einmal die Annahme einer zweiten Eigenwellenlänge neben λ_R (also ein Plus von zwei Konstanten) die Beobachtungen so gut wiederzugeben vermöge als eine von λ_R etwas abweichende Eigenschwingung. Trotzdem diese Tatsache zu weiteren experimentellen und theoretischen Untersuchungen hätte anregen sollen, findet sich in der Literatur der letzten 20 Jahre relativ wenig, was zur Lösung dieser Schwierigkeit beitragen könnte. K. Försterling (Ann., *61*, 1920) hat theoretisch das Verhältnis der Wellenlängen des Reflexionsmaximums und der Eigenschwingung auf Grund der üblichen Dispersionstheorie untersucht und die Abweichung des mit Hilfe der Dispersionskurve bestimmten Wertes λ_0 von λ_R quantitativ richtig bestätigt gefunden. Auch die Born-Kármán'sche Theorie der Krystallgitter führt, wie F. zeigt, auf ähnliche λ_0-Werte. Damit könnte man die Frage als gelöst betrachten, wenn nicht zwei andere Theorien früher schon Dispersionsformeln entwickelt hätten, deren λ_0 nicht größer, sondern kleiner als λ_R ist. Dies sind auf atomistischer Basis die zu formal demselben Resultate führenden Theorien von Planck (Berl. Ber., 1902) und Goldhammer (Math.-phys. Schriften, Bd. 16), nach deren Dispersionsformel

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \Sigma g \frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}, \text{ beziehungsweise } \frac{n^2-1}{n^2+2} = \mathfrak{k} + \frac{K}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

das λ_0 einen merklich kleineren Wert besitzt als λ_R. Ist man also einmal davon abgekommen, λ_R mit λ_0 zu identifizieren, so scheint die Entscheidung zwischen diesen zwei gegensätzlichen Ergebnissen nur mehr auf rein theoretischem Wege möglich zu sein, wie dies in Goldhammer's Dispersionstheorie zum Ausdruck kommt.

Die andere der erwähnten Dispersionstheorien steht nun auf der der atomistischen Hypothese völlig konträren Grundlage, sie folgt aus der elektromagnetischen Theorie G. Jaumann's (Wiener Ber., 1908), der die Kontinuität aller materiellen und Strahlungserscheinungen theoretisch begründet hat. Seine Dispersionsformel in der Gestalt

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \Sigma \frac{K}{\lambda_0^2-\lambda^2}$$

ergibt für λ_0 einen kleineren Wert als λ_R, stimmt also (allerdings nur) in dieser Hinsicht mit der neueren Entwicklung der atomistischen Dispersionstheorie überein. Er selbst hat aber stets an der Identität der Rubens'schen Reststrahlen mit der Reflexion am Orte der Eigenschwingung festgehalten. Prof. Jaumann, dessen Assistent ich mehrere Jahre bis zu seinem im Vorjahre plötzlich erfolgten Tode sein durfte, hat mich auf den Umstand aufmerksam gemacht, daß nach seiner Theorie der Brechungsindex am Orte der Eigenschwingung gleich Null, die Geschwindigkeit im dispergierenden Medium also unendlich, nach der üblichen atomistischen Theorie dagegen $n = \infty$, also die Geschwindigkeit gleich Null werde; ferner darauf, daß jene Theorie ein von λ_R abweichendes λ_0 einzuführen gezwungen sei, während es ihm gelang, mit dem genauen Wert λ_R, allerdings unter Aufgeben der Beziehung $n_0^2 = \varepsilon$ (welche ja nur dann gilt, wenn jenseits der größten Wellenlänge, mit welcher n und ε gemessen werden, keine Eigenschwingung mehr liegt, was man aber nicht mit Sicherheit behaupten kann), eine gute Wiedergabe zu erzielen. Ich unternahm also den Versuch, eine Entscheidung in dieser Frage herbeizuführen.

Zunächst kam es darauf an, die Ursache zu finden, warum die in ihren theoretischen Grundlagen und ihrer äußeren Form so verschiedenen Dispersionsformeln eine gleich gute Anpassung an die Dispersionskurve überhaupt gestatten. Dies muß in ihrer mathematischen Form begründet sein. Diese Untersuchung ist im folgenden Abschnitt durchgeführt und zeigt die mathematisch-formale Gleichwertigkeit der drei in Betracht kommenden Dispersionsformeln, wobei besonders zwischen der Jaumann'schen und der älteren Gleichung $n^2 - n_0^2 = \Sigma \frac{K}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$ eine einfache Beziehung besteht, welch letztere Formel nur der Kürze halber im folgenden als die Drude'sche bezeichnet sei. Nur für diese und die Jaumann'sche Formel werden daher die folgenden quantitativen Entwicklungen ausführlich durchgeführt werden.

Es sei aber noch zuvor darauf hingewiesen, daß ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Ausgangsgleichungen beider Theorien besteht. In der Atomistik findet die Verknüpfung der elektromagnetischen Gleichungen mit der Schwingungsgleichung (des Ions, beziehungsweise des elektrischen Resonators) durch Fluxionsglieder (des elektrischen Vektors und der Verschiebung des Ions, beziehungsweise des Resonatormoments) statt. Die Kontinuitätstheorie dagegen verknüpft die elektromagnetischen mit den stofflichen Gleichungen durch Derivationsglieder (des elektrischen Vektors und der stofflichen Variablen). Die Erweiterung, welche die elektromagnetischen Gleichungen damit erfahren, spielt auch in der Kontinuitätstheorie der elektrischen Longitudinalstrahlen eine wichtige Rolle.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

I. Die Dispersionsgleichung für nichtabsorbierende Medien.

1. In welcher mathematischen Beziehung stehen die Dispersionsformeln?

Allgemein lassen sich die Dispersionsformeln schreiben $n^2 = f_{(\lambda^2)}$. Um den qualitativen Charakter der Formel zu erkennen, entwickeln wir sie zunächst für den einfachsten Fall von nur einer Eigenschwingung:

$$n^2 - n_0^2 = \frac{K}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \quad n^2\lambda^2 - n^2\lambda_0^2 - n_0^2\lambda^2 + (K + n_0^2\lambda_0^2) = 0. \tag{a}$$

Die allgemeine Form für $y = n^2$, $x = \lambda^2$ lautet also

$$yx - ay - bx + c = 0 \qquad (a, b, c. \ .\text{Konstante})$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad n^2\lambda^2 - n^2(\lambda_0^2 + Kn_0^2) - n_0^2\lambda^2 + n_0^2\lambda_0^2 = 0 \tag{b}$$

$$yx - a'y - bx + c' = 0.$$

Die beiden Gleichungen ergeben für die Form der Dispersionskurve dasselbe Gesetz, müssen sich demnach den Beobachtungen gleich gut anpassen können. Allerdings werden die Werte der Konstanten in beiden Fällen nicht dieselben sein. Über deren Zusammenhang orientiert folgende Transformation:

Für $n = \infty$ wird die Jaumann'sche Gleichung

$$-\frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda_\infty^2}, \quad \lambda_\infty^2 = \lambda_0^2 + Kn_0^2.$$

Nun substituieren wir in die Gleichung statt λ_0^2 den Wert λ_∞^2.

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_\infty^2 - Kn_0^2 - \lambda^2}, \quad n^2 - n_0^2 = \frac{-Kn_0^4}{\lambda_\infty^2 - \lambda^2} = \frac{K'}{\lambda^2 - \lambda_\infty^2}$$

Es läßt sich also erreichen, daß beide Gleichungen für denselben Wert von n_0^2 die beobachtete Kurve wiedergeben, wobei in Jaumann's Formel die Wellenlänge für $n = 0$, in Drude's Formel die Wellenlänge für $n = \infty$ als Eigenwellenlänge erscheint; die Konstanten stehen in der Beziehung

$$K' = Kn_0^4.$$

Die Umformung der Dispersionsgleichung für zwei Eigenschwingungen

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{A}{\lambda_{01}^2 - \lambda^2} + \frac{B}{\lambda_{02}^2 - \lambda^2}$$

auf die Gleichung

$$n^2 - n_0^2 = \frac{C}{\lambda^2 - \lambda_{\infty 1}^2} + \frac{D}{\lambda^2 - \lambda_{\infty 2}^2}$$

ergibt die Konstantenbeziehung

$$C + D = (A + B) n_0^4.$$

Allgemein (bei beliebig vielen Eigenschwingungen) stellt sich die Gleichwertigkeit der Formeln in folgender Weise dar:

$$n^2 - n_0^2 = \sum_1^h f(\lambda^2) = \frac{f_1(\lambda^2)}{f_2(\lambda^2)}, \quad n^2 f_2(\lambda^2) = n_0^2 f_2(\lambda^2) + f_1(\lambda^2) = f_3(\lambda^2),$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \sum_1^h f'(\lambda^2) = \frac{f_1'(\lambda^2)}{f_2'(\lambda^2)}, \quad n^2 \left(f_2'(\lambda^2) + n_0^2 f_1'(\lambda^2)\right) = n^2 f_3'(\lambda^2) = \\ = n_0^2 f_2'(\lambda^2).$$

Die Funktionen $f_2(\lambda^2)$, beziehungsweise $f_2'(\lambda^2)$ sind in λ^2 vom Grad h und enthalten Konstantenkomplexe von λ_0^2, beziehungsweise λ_∞^2. Für die Funktionen $f_3(\lambda^2)$, beziehungsweise $f_3'(\lambda^2)$ gilt dasselbe; außerdem schließen sie mit den Funktionen $f_1(\lambda^2)$, beziehungsweise $f_1'(\lambda^2)$ (vom Grad $h-1$) auch die Konstantenkomplexe von n_0^2, K und K' ein.

Die Dispersionsformel

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \mathfrak{k} + \frac{K'}{\lambda^2 - \lambda_0'^2} \tag{c}$$

läßt sich ebenso wie die beiden anderen auf die allgemeine Form $yx - ay - bx + c = 0$ bringen. Daher vermag sie genau so wie jene Gleichungen die Beobachtungen wiederzugeben. Die Konstanten stehen in folgender Beziehung (n_0, λ_0, K aus der Jaumann'schen Gleichung):

$$n_0^2 = \frac{1 + 2\mathfrak{k}}{1 - \mathfrak{k}}$$

$$\lambda_0'^2 = \lambda_0^2 - \frac{2}{3}(n_0^2 - K) + \frac{4}{3} n_0^2 K,$$

$$K' = \frac{1}{3}(K - n_0^2 + 4 n_0^2 K - 2 n_0^4 + 4 n_0^4 K).$$

Wenn im folgenden die verschiedenen Transformationen und die daraus hervorgehenden Konstantenbeziehungen auch numerisch ausgewertet erscheinen, so soll dies einerseits den Grad der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zum Ausdruck

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bringen (als Ersatz für die nicht abgedruckten graphischen Transformationen); andererseits interessiert aber auch der Vergleich mit der Reststrahlenwellenlänge.

Diese Kontrollbestimmung hat allerdings mit zwei Fehlerquellen zu rechnen: 1. mit den Beobachtungsfehlern, 2. mit der gegenseitigen Beeinflussung der Eigenschwingungen. Dem letzteren Umstande würde natürlich Genüge geleistet, wenn man für die beobachtete Zahl der Eigenschwingungen rechnet; doch würde dies schon bei zwei Eigenschwingungen recht kompliziert. Es werden sich daher jene Fälle zur Kontrolle am geeignetsten erweisen, in denen eine Eigenschwingung von den anderen so weit entfernt ist, daß deren Einfluß auch in der Rechnung vernachlässigt werden kann. Es gibt tatsächlich einige Krystalle, wo solch einfache Verhältnisse vorliegen. Insbesondere bei Sylvin und Steinsalz wurde nur eine Eigenschwingung im Ultrarot[1] beobachtet und eine im Ultraviolett. Der Einfluß der ultravioletten Eigenschwingung auf die ultrarote ist nun (wie auch die bezüglichen Dispersionsformeln zeigen) tatsächlich zu vernachlässigen, so daß sich hier die Beziehungen der einfachen dreikonstantigen Formel nachprüfen lassen. Dies wird im folgenden durchgeführt werden.

Vorerst muß aber noch auf einen Umstand Bezug genommen werden, der den bisherigen Untersuchungen zur Orientierung diente. Beide Theorien identifizieren die beobachtete Wellenlänge der Reststrahlen mit der Eigenwellenlänge und haben diesen Wert als vorausgegebene Konstante in die Gleichungen eingeführt. (Eine Ausnahme bildet Goldhammer's schon erwähnte Theorie.) Nun haben aber vorstehende Rechnungen wohl dasselbe n_0, nicht aber dasselbe λ_0 für die Anpassung beider Formeln ergeben (andere Werte sind nicht möglich, da nur eine Kombination n_0, λ_0, K den Beobachtungen genügen kann). Es müßte also unmöglich sein, unter Voraussetzung der Reststrahlenwellenlänge als λ_0 in beiden Fällen gleich gute Anpassung zu erzielen. Daß dies tatsächlich nicht deutlich zum Ausdruck gekommen ist, liegt an folgenden Umständen:

---

[1] Nach Rubens und Hollnagel (Ber. der Phys. Ges., *8*, 1910) sind auch hier zwei einander naheliegende Reflexionsmaxima vorhanden, wie die Analyse von Interferometerkurven ergibt. Das eine ist außerdem merklich kleiner, so daß die direkt gemessene (mittlere) Reststrahlenwellenlänge mit jener des größeren Maximums nahezu zusammenfällt. Demnach ist es auch erlaubt, mit einer mittleren Eigenwellenlänge zu rechnen und die im folgenden angeführten Transformationen bestätigen dies. Wie Fig. 1 zeigt, fallen die den Wellenlängen 63, 83 und 94 μ entsprechenden Brechungsindizes für NaCl genau in die auf eine Gerade transformierte Dispersionskurve; die schwächere Reflexionskurve ist hier nach kleineren λ hin verschoben, so daß sie im angeführten Bereich nicht merklich zur Geltung kommt. Bei KCl dagegen ist es umgekehrt, die Reflexionskurve erscheint in diesem Gebiet gehoben; tatsächlich zeigt auch die Transformation eine Abweichung im entsprechenden Sinn. — Den zu vernachlässigenden Einfluß von Eigenschwingungen auf den Verlauf der Dispersionskurve haben Herzfeld und Wolf (Ann. d. Phys., *76*, 1925) bei den Edelgasen nachgewiesen.

1. Eine Variation der drei Konstanten läßt sich auf Kosten der Konstante K ausführen, deren Größe anderweitig nicht genau festgestellt werden kann[1]; es hat sich gezeigt, daß mit derartigen, unter Voraussetzung der Größen λ_0 (eventuell λ_0 und n_0) bestimmten Werten von K die Anpassungsfähigkeit der Gleichungen sich nicht viel ändert, wenigstens in dem vor der ultraroten Eigenschwingung gelegenen Gebiet, während bei den größeren Wellenlängen die Unterschiede schon beträchtlich werden. Darauf ist aber bisher keine Rücksicht genommen worden.

2. Die Anpassung wurde gesteigert durch Einführung von weiteren Konstanten in die Formel (insbesondere herrührend von Eigenschwingungen im Ultraviolett).

Diese bisherigen Ergebnisse zusammengenommen geben daher nicht die Möglichkeit, zwischen beiden Dispersionsformeln zu einer Entscheidung zu kommen. Es erscheint mir dagegen als der einzig verläßliche Weg, zunächst zu prüfen, ob die Dispersionskurve einer Gleichung von der Form $yx - ay - bx + c = 0$ genügt; sodann, wenn dies der Fall ist, jede Konstante unabhängig von den beiden anderen zu bestimmen. Die so ermittelten Werte können dann zur Prüfung der Theorie dienen: Es soll n_0^2 mit dem Wert der Dielektrizitätskonstanten, λ_0 mit der Reststrahlenwellenlänge übereinstimmen.[2]

2. Bestimmung der Konstanten n_0^2, λ_0, K.

Die Kontrolle, ob die Dispersionskurve obiger Gleichung genügt, wird dadurch erleichtert, daß sich diese Kurve auf eine Gerade transformieren läßt. Dies geschieht folgendermaßen (Transformation I):

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad \frac{n^2 n_0^2}{n_0^2 - n^2} = y, \lambda^2 = x, \quad y = -\frac{1}{K}x + \frac{\lambda_0^2}{K}, \tag{a}$$

$$n^2 - n_0^2 = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad \frac{1}{n^2 - n_0^2} = y, \lambda^2 = x, \quad y = -\frac{1}{K}x + \frac{\lambda_0^2}{K}, \tag{b}$$

In diesen Formeln muß allerdings der Wert von n_0^2 angenommen werden, aus der Geraden lassen sich ja auch nur zwei

---

[1] Die diesbezüglichen Versuche auf quantentheoretischer Grundlage sind trotz einiger Erfolge wohl noch nicht zu endgültigem Abschluß gelangt.

Da die Untersuchung nur die richtige Bestimmung der angeführten Konstanten bezweckt und sich außerdem auf eine Eigenschwingung beschränkt, um die Sicherheit der Ergebnisse möglichst zu steigern, konnte nur ein sehr geringer Teil der experimentellen und theoretischen Arbeiten auf dem Gebiete der Dispersion verwertet werden. So konnte z. B. auf die zahlreichen Messungen von Cl. Schaefer und seinen Mitarbeitern zur Bestimmung ultraroter Eigenfrequenzen fester Körper, die durch die mögliche Interpretation als Grund- und Oberschwingungen besonderes Interesse beanspruchen, kein Bezug genommen werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Konstanten bestimmen. Die Abschnitte auf der x-Achse und y-Achse liefern

$$\lambda_0^2 = x_0, \quad K = \frac{x_0}{y_0}$$

Da hier der Wert von n_0^2 vorgegeben sein muß, ist dies nicht die allgemeine Bestimmung, die angestrebt wird. Da aber die so transformierten Kurven für KCl, NaCl, CaF_2 mit großer Genauigkeit Gerade ergeben (für $n_0^2 = \varepsilon$), sind diese Transformationen hier aufgenommen. Sie beweisen auch, daß die Voraussetzung $n_0^2 = \varepsilon$ in diesen Fällen richtig ist.

Die Transformation kann auch so durchgeführt werden, daß der Wert λ_0 in die Gleichungen eingeführt wird (Transformation II):

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad \frac{1}{n^2} = y, \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda^2} = x, \quad y = Kx + \frac{1}{n_0^2} \qquad \text{(a)}$$

$$n^2 - n_0^2 = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad n^2 = y, \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda^2} = x, \quad y = Kx + n_0^2 \qquad \text{(b)}$$

$$n_0^2 = \frac{1}{y_0}, \quad K = -\frac{y_0}{x_0} \qquad \text{ad (a)}$$

$$n_0^2 = y_0, \quad K = -\frac{y_0}{x_0}. \qquad \text{ad (b)}$$

Wird nun für λ_0 die Reststrahlenwellenlänge eingesetzt, so ersieht man aus der graphischen Darstellung, daß für Sylvin die transformierten Punkte fast ebensogut auf einer Geraden liegen (und $\frac{1}{n_0^2} \doteq 0$ wird), während für NaCl eine deutliche Abweichung von der Geraden sich zeigt. Man muß also die Transformation I für richtig halten, demnach auch die aus ihr folgenden λ_0-Werte.

Diese sind nun für die Jaumann'sche Formel durchwegs kleiner als λ_R, und zwar ungefähr in demselben Verhältnis. Für Drude's Formel dagegen sind sie durchwegs größer als λ_R.

Die Beziehung zwischen den Konstanten der Formeln berechnet sich folgendermaßen:

a) Für $n = \infty$ wird

$$y = \frac{n^2 n_0^2}{n_0^2 - n^2} = -n_0^2,$$

daher

$$-n_0^2 = -\frac{1}{K}x + \frac{\lambda_0^2}{K}, \quad x = \lambda_\infty^2 = \lambda_0^2 + K n_0^2$$

die schon bekannte Beziehung.

b) Für $n = \infty$ wird

$$y = 0 = -\frac{1}{K}x + \frac{\lambda_0^2}{K}, \quad x = \lambda_0^2.$$

Der zu $y = -n_0^2$ gehörige Wert x der Jaumann'schen Gleichung soll also derselbe sein wie der Abschnitt für $y = 0$ in Drude's Gleichung, was auch für NaCl und KCl der Fall ist (und sein muß, da die Beobachtungen, insbesondere auch im Gebiete jenseits der Eigenschwingung, der Gleichung genügen).

Resultate.

1. Sylvin (Werte nach Paschen, Ann. d. Phys., *26*, 1908, und Rubens, Berl. Ber., 1915).

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = y, \ \lambda^2 = x, \qquad y = -\frac{1}{K}x + \frac{\lambda_0^2}{K},$$

Geg.: $n_0^2 = 4 \cdot 7$. Best.: $\lambda_0 = 46 \cdot 8\ \mu$, $\lambda_\infty = 68 \cdot 8\ \mu$, $K = 541 \cdot 5$.

2. Steinsalz (Werte nach Paschen, l. c., und Rubens, l. c.). Dieselbe Transformation.

Geg.: $n_0^2 = 5 \cdot 82$. Best.: $\lambda_0 = 38 \cdot 7\ \mu$, $\lambda_\infty = 61 \cdot 1\ \mu$, $K = 385$.

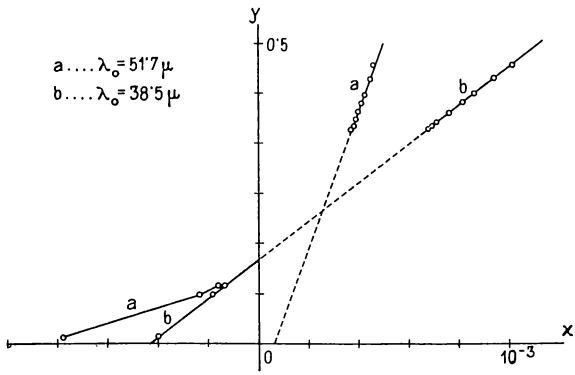

Fig. 1.

3. Fluorit (Werte nach Paschen, W. Ann., *56*, 1895). Dieselbe Transformation.

Geg.: $n_0^2 = 6 \cdot 82$. Best.: $\lambda_0 = 20 \cdot 92\ \mu$, $\lambda_\infty = 38 \cdot 25\ \mu$, $K = 150 \cdot 2$.

4. Sylvin.

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad \frac{1}{n^2} = y, \quad \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda^2} = x, \ldots y = Kx + \frac{1}{n_0^2}.$$

Geg.: a) $\lambda_0 = 63 \cdot 4\ \mu$ $(= \lambda_R)$, b) $\lambda_0 = 46 \cdot 8\ \mu$, c) $\lambda_0 = 68 \cdot 8\ \mu$ $(= \lambda_\infty)$.

Best.: a) $n_0^2 = 4 \cdot 25$, b) $n_0^2 = 4 \cdot 795$, $K = 548 \cdot 7$, $\lambda_\infty = 69 \cdot 5\ \mu$, c) $n_0^2 = 4 \cdot 4$.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

5. Steinsalz. Dieselbe Transformation (siehe Fig. 1).

Geg.: a) $\lambda_0 = 51 \cdot 7\,\mu$, $(= \lambda_R)$, b) $\lambda_0 = 38 \cdot 5\,\mu$. Best.: a) $n_0^2 = 6 \cdot 43$, b) $n_0^2 = 5 \cdot 92$, $K = 386 \cdot 7$, $\lambda_\infty = 61 \cdot 4\,\mu$.

6. Sylvin.

$$n^2 - n_0^2 = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \quad \frac{1}{n^2 - n_0^2} = y, \; \lambda^2 = x, \quad . \; y = -\frac{1}{K} x + \frac{\lambda_0^2}{K}.$$

Geg.: $n_0^2 = 4 \cdot 7$. Best.: $\lambda_0 = 68 \cdot 5\,\mu$, $\lambda_{(n=0)} = 46 \cdot 66\,\mu$, $K = -11840$ $(= -541 \cdot 5 . (4 \cdot 7)^2 = -11960)$.

7. Steinsalz. Dieselbe Transformation.

Geg.: $n_0^2 = 5 \cdot 82$. Best.: $\lambda_0 = 60 \cdot 66\,\mu$, $\lambda_{(n=0)} = 38 \cdot 52\,\mu$, $K = -12825$ $(= -385 . (5 \cdot 82)^2 = -13040)$.

Vergleiche mit anderen Resultaten der Atomtheorie.

1. K. Försterling (Ann. d. Phys., *61*, 1920) rechnet das Verhältnis der maximalen Reflexion zu der Reflexion am Orte der Eigenschwingung und daraus das Verhältnis der zugehörigen Wellenlängen. Er findet $\lambda_0 \doteq 74\,\mu$ für KCl, $\lambda_0 \doteq 60\,\mu$ für NaCl. Also ein Beweis, daß die nach Transformation I graphisch gefundenen Werte für λ_0 tatsächlich der Ketteler-Drude'schen Theorie entsprechen.

2. A. Goldhammer (Math.-phys. Schriften, Bd. 16) entwickelt die Dispersionstheorie unter Berücksichtigung eines Gliedes, das bei Drude vernachlässigt erscheint. Er gelangt zu denselben Formeln wie Ketteler (W. Ann., 1884, 1895), aber λ_0 bedeutet darin nicht die Wellenlänge der Eigenschwingung, sondern steht zu dieser in einer bestimmten Beziehung $\left(\frac{1}{\lambda_0'^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \text{konst.}\right)$. Auf Grund dieser Theorie bestimmt er z. B. die Dispersionsformel für KCl, die für das Ultrarot lautet

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = 0 \cdot 514164 + \frac{605 \cdot 5582}{\lambda^2 - (51 \cdot 009)^2}.$$

(Dieselbe Formel folgt auch aus der Planck'schen Dispersionstheorie.) Er erhält also einen ähnlichen Wert für λ_0 (51·009) wie der hier nach Transformation I bestimmte (46·8). Die Formel stellt aber den abfallenden Ast der Dispersionskurve nicht so gut dar wie die hier bestimmte, was folgende Tabelle zum Ausdruck bringt:

$\lambda\mu$	.83	94	117	∞	
n_{beob}...	4·16	2·954	2·43	2·168	
n_{ber}...	3·23	2·764	2·46	2·168.	.nach Transformation I
n_{ber}.....	2·588	2·393	2·227	2·043.	Goldhammer.

Dieser Vergleich ist allerdings nicht maßgebend; denn die Goldhammer'sche Formel läßt sich exakt auf die Jaumann'sche Form transformieren (siehe p. 5) und ergibt für KCl:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = 0\cdot 55 + \frac{795}{\lambda^2-2949}, \quad \lambda_0 = 54\cdot 4\,\mu.$$

Die Theorie nach Planck und Goldhammer ergibt die Dispersionsformel unmittelbar in einer anderen Gestalt. Die Gleichung

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \mathfrak{k} + \sum \frac{K}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

folgt durch Transformation aus der Gleichung

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum g\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2},$$

indem $\mathfrak{k} = \Sigma g$, $K_i = g_i\,\lambda_{0i}^2$ ist. Also muß

$$\sum \frac{K}{\lambda_0^2} = \Sigma g = \mathfrak{k}$$

sein. Um dieser Bedingung zu genügen, mußte Goldhammer noch zwei Eigenschwingungen im Ultraviolett annehmen. Das ist übrigens den Dispersionsformeln der Atomtheorie in ihrer theoretisch unmittelbar gewonnenen Form eigentümlich, da sie sonst für den Ansatz einer Eigenschwingung nur zwei verfügbare Konstanten enthielten. Auch durch die auf p. 1 angedeutete Transformation wird eine dritte Konstante eingeführt (n_0^2), welche ebenso wie in der Kontinuitätstheorie das Quadrat des Brechungsindex für $\lambda = \infty$ bedeutet. Atomtheoretisch muß n_0^2 gleich sein dem Quadrat des Brechungsindex für $\lambda = 0$ ($n = 1$) plus den Restgliedern der vorhandenen Eigenschwingungen (für $\lambda = \infty$); kontinuitätstheoretisch wird $\frac{1}{n_0^2} = 1 - \Sigma \frac{K}{\lambda_0^2}$.

3. Bestimmung der Konstanten aus den Differentialkurven.

Obwohl vorstehende Bestimmung der Konstanten sehr für ihre Richtigkeit spricht, erscheint es doch wünschenswert, dieselben unabhängig voneinander zu ermitteln (insbesondere den richtigen Wert der Konstanten n_0^2). Eine Methode hierzu bietet sich in der Differentiation der Dispersionsgleichungen. Zweimalige Differentiation eliminiert zwei Konstanten, so daß die dritte aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden kann. Diese Methode bietet zugleich ein viel schärferes Kriterium für die Richtigkeit der Dispersionsformel als die vorstehende Transformation; denn geringfügige Änderungen des Brechungsindex, die in der Dispersions-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

kurve gar nicht zum Ausdruck kommen, werden in den Differentialkurven deutlich erkennbar, so daß man sicherlich nicht ungefähr dieselben Werte im Verlauf der Dispersionskurve erhielte, wenn sie der Formel nicht Genüge leistete. Die Rechnung wurde für NaCl durchgefürt und ergibt für n_0^2 den Wert der Dielektrizitätskonstanten, für λ_0 und K dieselben Werte wie die frühere Transformation. Die Entwicklung der Gleichungen für λ_0 und n_0^2 gestaltet sich folgendermaßen:

$$1. \quad \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \qquad n_0^2 - n^2 = -2 \frac{\left(\frac{dn^2}{d\lambda^2}\right)^2}{\frac{d^2 n^2}{(d\lambda^2)^2}}$$

$$n^2 - n_0^2 = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \qquad n_0^2 - n^2 = -2 \frac{\left(\frac{dn^2}{d\lambda^2}\right)^2}{\frac{d^2 n^2}{(d\lambda^2)^2}}$$

$$2. \quad \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \qquad \lambda_0^2 - \lambda^2 = -2 \frac{\left(\frac{d\lambda^2}{d\frac{1}{n^2}}\right)^2}{\frac{d^2 \lambda^2}{\left(d\frac{1}{n^2}\right)^2}}$$

$$3. \quad n^2 - n_0^2 = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \qquad \lambda_0^2 - \lambda^2 = -2 \frac{\left(\frac{d\lambda^2}{dn^2}\right)^2}{\frac{d^2 \lambda^2}{(dn^2)^2}}$$

Die Differentialkurven sind gerechnet, da sich dies genauer erwies als die graphische Konstruktion. Auf eine kontinuierliche Ausgleichung der Differentialkurven konnte verzichtet werden, da es auf ein sehr genaues quantitatives Resultat nicht ankommt und auch größere Änderungen im Verlauf der Kurve den Mittelwert des Resultates nicht wesentlich beeinflussen.

Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt (wobei, wie ersichtlich, bis zu $\lambda \doteq 8\,\mu$ eine Beeinflussung durch die ultraviolette Eigenschwingung zum Ausdruck kommt, so daß erst die größeren Wellenlängen entsprechenden Werte für die Mittelwertbildung geeignet erscheinen).

Tabelle 1.

λ^2....	23·399	39·462	65·422	108·03	172·432	248·983	329·818	416·256
n_0^2....		3·137	4·0345	5·742	5·923	7·260	5·684	5·372

Der Mittelwert aus den letzten fünf Werten ist $n_0^2 = 5 \cdot 996$.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Tabelle 2.

λ^2..	39·7	65·6	109	174·6	251·3	332·2	419·7
λ_0.....	26·4	45·75	38·7	39	40·5	39·15	38·27

Der Mittelwert aus den letzten fünf Werten ist $\lambda_0 = 39 \cdot 12\,\mu$.

Tabelle 3.

λ^2..	22·8	39·2	65·7	108	173·2	249·6	331	417·5
λ_0.....		30·55	134·9	60·55	61·5	72·5	60·44	58·0

Der Mittelwert aus den letzten fünf Werten ist $\lambda_0 = 62 \cdot 6\,\mu$.

Schließlich wurde auch das ultraviolette Gebiet des NaCl-Spektrums daraufhin untersucht, ob es einer dreikonstantigen Formel genüge, und ein sehr befriedigendes Resultat gewonnen: Die Formel umfaßt nicht nur den ultravioletten, sondern auch den sichtbaren und infraroten Teil des Spektrums (bis $\lambda \doteq 1 \cdot 8\,\mu$), und die Konstante $(n_0^2)_v$ entspricht vollkommen den früher bestimmten Werten im Ultrarot, wie folgende Rechnung beweist:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K_1}{\lambda_{01}^2 - \lambda^2} + \frac{K_2}{\lambda_{02}^2 - \lambda^2} \doteq \frac{K_1}{\lambda_{01}^2 - \lambda^2} + \frac{K^2}{\lambda_{02}^2} \quad \text{(für kleine } \lambda\text{)}$$

$$\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{K_2}{\lambda_{02}^2}\right) = \frac{K_1}{\lambda_{01}^2 - \lambda^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n_0^2)_v}.$$

Nach früherem ist

$$\frac{1}{n_0^2} = \frac{1}{5 \cdot 82}, \quad \frac{K_2}{\lambda_{02}^2} = 0 \cdot 257, \quad \left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{K_2}{\lambda_{02}^2}\right) = 0 \cdot 4287,$$

hier wurde bestimmt $(n_0^2)_v = 2 \cdot 33$, also $\frac{1}{(n_0^2)_v} = 0 \cdot 4292$.

Die Durchführung der Transformation I der Jaumann'schen Gleichung liefert die Werte $\lambda_0 = 0 \cdot 1124\,\mu$, $\lambda_\infty = 0 \cdot 14\,\mu$, $K = 0 \cdot 003278$.

Die bisher gewonnenen Resultate geben Aufschluß über die Größe der Konstanten n_0^2, λ_0, K der beiden durchgerechneten Dispersionsformeln. Damit ist aber die Frage, welcher von den beiden λ_0-Werten der richtige sei, noch nicht entschieden. Hierzu bedarf es eines weiteren Kriteriums und dieses kann nur die Theorie liefern. Da ist zunächst darauf hinzuweisen, daß die betrachteten Krystalle als vollkommen durchsichtig (nicht absorbierend) angesehen wurden. Aus dem Verlauf der Absorptionskurve ist aber zu entnehmen, daß die Dämpfung pro Wellenlänge $\varkappa$ äußerst kleine Werte haben kann, aber an der Stelle, wo die Absorption ihr Maximum erreicht (in der Nähe einer Eigenschwingung), doch auf einen beträchtlichen Wert (zirka 1) ansteigt. Auch das Reflexionsmaximum

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

liegt in der Nähe der Eigenschwingung, seine Lage aber wird von dem Verlauf der Absorptionskurve beeinflußt. Aus den Beobachtungen (soweit zusammengehörige Absorptions- und Reflexionskurven in der Umgebung von Eigenschwingungen aufgenommen wurden) ist zu entnehmen, daß die Wellenlänge maximaler Absorption (λ_A) ungefähr gleich jener der maximalen Reflexion (λ_R) ist. Da nun bei Berücksichtigung der Absorption die verschiedenen Dispersionsformeln nicht mehr in mathematischer Hinsicht formal identisch sind, wird zu untersuchen sein, ob die Theorie das Verhältnis $\frac{\lambda_R}{\lambda_0}$, beziehungsweise $\frac{\lambda_A}{\lambda_0}$ in Übereinstimmung mit dem durch die Erfahrung geforderten ergibt. Diese Berechnung wird im folgenden für die Jaumann'sche Theorie durchgeführt.

Für die Drude'sche Dispersionstheorie hat die schon erwähnte Arbeit Försterling's die Beziehung $\frac{\lambda_R}{\lambda_0} < 1$ ergeben (siehe p. 10). Auch Goldhammer (l. c.) hat den richtigen Wert von λ_R aus seiner Theorie berechnet.

II. Die Dispersionsgleichung der Kontinuitätstheorie in absorbierenden Medien.

Die Theorie der Dispersion für absorbierende Medien ergibt folgende Dispersionsgleichung:[1]

$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\varkappa^2}-\frac{1}{n_0^2}=p^2\frac{\Delta_1 w+\Delta_2 x/p}{\varepsilon_0 c_0^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2)}+$$
$$+\frac{p^4(\Delta_1^2+\Delta_2^2)^2}{\varepsilon_0 c_0^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2)\left[c_0^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2)+p^2\left(w\Delta_1+\frac{x}{p}\Delta_2\right)\right]^2}$$

---

[1] Siehe G. Jaumann, »Elektromagn. Theorie«, 1908, und »Physik der kontinuierlichen Medien«, 1918, ferner E. Lohr »Das Problem der Grenzbedingungen in G. Jaumanns elektromagnetischer Theorie«, 1912, diese Berichte.

[2] Diese Gleichung folgt aus der Bedingungsgleichung für Transversalstrahlen

$$\varepsilon_0(\mu_0-W\mathfrak{q}^2)-\frac{c_0^2}{p^2}\mathfrak{q}^2=0,\ \text{worin}\ W=\frac{w+\frac{i}{p}x}{\Delta_1+i\Delta_2},\ \mathfrak{q}=p\mathfrak{n}(1+i\varkappa),$$

(siehe E. Lohr, l. c. p. 649). Die Konstanten g, g', y, y', $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ sind Materialkonstanten der stofflichen Gleichungen

$$g\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial t}+y\bar{\gamma}+z\bar{\xi}+\mathfrak{k}[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla]+\mathfrak{k}_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e}=0,$$

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t}+y'\bar{\xi}-z\bar{\gamma}+l[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla]+l_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e}=0.$$

Es bedeuten

$$\Delta_1 = (p_0^2 - p^2)\, g g' + y y', \quad \Delta_2 = -p\,(g y' + y g'), \quad w = -2\,(k^2 g' + l^2 g),$$
$$x = -2\,(k^2 y' + l^2 y).$$

Diese Gleichung reduziert sich für die Teile des Spektrums, wo $\varkappa$ sehr kleine Werte annimmt, nur dann auf die (eben geprüfte) Gleichung

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \text{ wenn } \frac{y}{g} \text{ und } \frac{y'}{g'} \ll p_0 \text{ sind.}$$

Die Konstante K hat dann den Wert

$$K = \left(\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'}\right) \frac{2\,\lambda_0^2}{\varepsilon_0\, c_0^2}.$$

Es ist dies derselbe Wert, der auch aus der Theorie für nichtabsorbierende Medien folgt. Die Größe dieser Konstanten läßt sich aber in jedem Falle genau ermitteln, wie dies die vorangehenden Ausführungen gezeigt haben. Daher berechnet sich daraus rückläufig der Wert des Konstantenkomplexes $\left(\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'}\right)$. Dieser beträgt für NaCl ($\varepsilon_0 = 5 \cdot 82$, $\lambda_0 = 38 \cdot 7\ \mu$, $K = 385$):

$$\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'} = 6 \cdot {}^{75} . 10^{20} = 0 \cdot {}^{75}\, c_0^2.$$

Die Eigenfrequenz p_0 (für nichtabsorbierende Medien) ist festgelegt durch $p_0^2 = \frac{z^2}{g g'}$, womit also dieser Konstantenkomplex zahlenmäßig bestimmt ist.

Die Forderung $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \ll p_0$ ergibt für NaCl ($p_0 = 4 \cdot 86 . 10^{13}$) deren Größenordnung

$$\frac{y}{g} \text{ und } \frac{y'}{g'} \leqq 10^{11}.$$

Neben obiger Dispersionsgleichung gewinnt man auch eine Gleichung für die Dämpfung pro Wellenlänge $\varkappa$ in Abhängigkeit von p

$$\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} = \frac{w p^2 \Delta_2 - x p \Delta_1}{c_0^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + (p^2 w \Delta_1 + x p \Delta_2)} =$$
$$= \frac{K_1 p^3 + K_2 p}{(p_0^2 - p^2)^2 - K_3 p^2 (p_0^2 - p^2) - K_4 p^2 + K_5}.$$

Soweit die Voraussetzung $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \ll p_0$ zutrifft, ist

$$\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2} \doteq \frac{K_1' \lambda^3 + K_2' \lambda}{(\lambda_0^2 - \lambda^2)^2 + K_3'(\lambda_0^2 - \lambda^2)}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

liegt in der Nähe der Eigenschwingung, seine Lage aber wird von dem Verlauf der Absorptionskurve beeinflußt. Aus den Beobachtungen (soweit zusammengehörige Absorptions- und Reflexionskurven in der Umgebung von Eigenschwingungen aufgenommen wurden) ist zu entnehmen, daß die Wellenlänge maximaler Absorption (λ_A) ungefähr gleich jener der maximalen Reflexion (λ_R) ist. Da nun bei Berücksichtigung der Absorption die verschiedenen Dispersionsformeln nicht mehr in mathematischer Hinsicht formal identisch sind, wird zu untersuchen sein, ob die Theorie das Verhältnis $\frac{\lambda_R}{\lambda_0}$, beziehungsweise $\frac{\lambda_A}{\lambda_0}$ in Übereinstimmung mit dem durch die Erfahrung geforderten ergibt. Diese Berechnung wird im folgenden für die Jaumann'sche Theorie durchgeführt.

Für die Drude'sche Dispersionstheorie hat die schon erwähnte Arbeit Försterling's die Beziehung $\frac{\lambda_R}{\lambda_0} < 1$ ergeben (siehe p. 10). Auch Goldhammer (l. c.) hat den richtigen Wert von λ_R aus seiner Theorie berechnet.

II. Die Dispersionsgleichung der Kontinuitätstheorie in absorbierenden Medien.

Die Theorie der Dispersion für absorbierende Medien ergibt folgende Dispersionsgleichung: [1]

$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\varkappa^2}-\frac{1}{n_0^2}=p^2\frac{\Delta_1 w+\Delta_2 x/p}{\varepsilon_0 c_0^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2)}+$$
$$+\frac{p^4(\Delta_1^2+\Delta_2^2)^2}{\varepsilon_0 c_0^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2)\left[c_0^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2)+p^2\left(w\Delta_1+\frac{x}{p}\Delta_2\right)\right]^2}$$

---

[1] Siehe G. Jaumann, »Elektromagn. Theorie«, 1908, und »Physik der kontinuierlichen Medien«, 1918, ferner E. Lohr »Das Problem der Grenzbedingungen in G. Jaumanns elektromagnetischer Theorie«, 1912, diese Berichte.

[2] Diese Gleichung folgt aus der Bedingungsgleichung für Transversalstrahlen

$$\varepsilon_0(\mu_0-W\mathfrak{q}^2)-\frac{c_0^2}{p^2}\mathfrak{q}^2=0,\ \text{worin}\ W=\frac{w+\frac{i}{p}x}{\Delta_1+i\Delta_2},\ \mathfrak{q}=p\mathfrak{n}(1+i\varkappa),$$

(siehe E. Lohr, l. c. p. 649). Die Konstanten g, g', y, y', $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ sind Materialkonstanten der stofflichen Gleichungen

$$g\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial t}+y\bar{\gamma}+z\bar{\xi}+\mathfrak{k}\,[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla]+\mathfrak{k}_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e}=0,$$

$$g'\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t}+y'\bar{\xi}-z\bar{\gamma}+l\,[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla]+l_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e}=0.$$

Es bedeuten

$$\Delta_1 = (p_0^2 - p^2)\, g g' + y y', \quad \Delta_2 = -p\,(g y' + y g'), \quad w = -2\,(k^2 g' + l^2 g),$$
$$x = -2\,(k^2 y' + l^2 y).$$

Diese Gleichung reduziert sich für die Teile des Spektrums, wo $\varkappa$ sehr kleine Werte annimmt, nur dann auf die (eben geprüfte) Gleichung

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{K}{\lambda_0^2 - \lambda^2}, \text{ wenn } \frac{y}{g} \text{ und } \frac{y'}{g'} \ll p_0 \text{ sind.}$$

Die Konstante K hat dann den Wert

$$K = \left(\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'}\right) \frac{2\,\lambda_0^2}{\varepsilon_0\, c_0^2}.$$

Es ist dies derselbe Wert, der auch aus der Theorie für nichtabsorbierende Medien folgt. Die Größe dieser Konstanten läßt sich aber in jedem Falle genau ermitteln, wie dies die vorangehenden Ausführungen gezeigt haben. Daher berechnet sich daraus rückläufig der Wert des Konstantenkomplexes $\left(\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'}\right)$. Dieser beträgt für NaCl ($\varepsilon_0 = 5 \cdot 82$, $\lambda_0 = 38 \cdot 7\ \mu$, $K = 385$):

$$\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'} = 6 \cdot {}^{75} . 10^{20} = 0 \cdot {}^{75}\, c_0^2.$$

Die Eigenfrequenz p_0 (für nichtabsorbierende Medien) ist festgelegt durch $p_0^2 = \frac{z^2}{g g'}$, womit also dieser Konstantenkomplex zahlenmäßig bestimmt ist.

Die Forderung $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \ll p_0$ ergibt für NaCl ($p_0 = 4 \cdot 86 . 10^{13}$) deren Größenordnung

$$\frac{y}{g} \text{ und } \frac{y'}{g'} \leqq 10^{11}.$$

Neben obiger Dispersionsgleichung gewinnt man auch eine Gleichung für die Dämpfung pro Wellenlänge $\varkappa$ in Abhängigkeit von p

$$\frac{2\,\varkappa}{1 - \varkappa^2} = \frac{w p^2 \Delta_2 - x p \Delta_1}{c_0^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + (p^2 w \Delta_1 + x p \Delta_2)} =$$
$$= \frac{K_1 p^3 + K_2 p}{(p_0^2 - p^2)^2 - K_3 p^2 (p_0^2 - p^2) - K_4 p^2 + K_5}.$$

Soweit die Voraussetzung $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \ll p_0$ zutrifft, ist

$$\frac{\varkappa}{1 - \varkappa^2} \doteq \frac{K_1' \lambda^3 + K_2' \lambda}{(\lambda_0^2 - \lambda^2)^2 + K_3' (\lambda_0^2 - \lambda^2)}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

In größerer Entfernung beiderseits der Eigenschwingung gilt (wie aus der Gleichung unmittelbar zu erschließen ist)

$$\varkappa \doteq K' \lambda^3, \text{ beziehungsweise } \varkappa \doteq \frac{K''}{\lambda}.$$

Setzt man für die ultrarote Eigenschwingung von NaCl $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \doteq 10^{11}$, so erhält man für die Umgebung der Eigenschwingung, wo beobachtete Werte von $\varkappa$ vorliegen, die richtige Größenordnung $\varkappa \doteq 10^{-3}$. Die Messungen an Quarz zeigen für lange Wellen eine Abhängigkeit des $\varkappa$ ungefähr von λ^2, was obige Gleichung ebenfalls ergibt. Dagegen ist der im Infrarot aufgenommene Teil der Absorptionskurve für die Beurteilung im allgemeinen nicht brauchbar, da hier die Absorptionskurve in jene der ultravioletten übergeht, wodurch z. B. bei NaCl, KCl und CaF_2 $\varkappa$ als Funktion von λ^{10} erscheint!

Ferner wurde die Anpassung der Absorptionskurve an vorliegende Beobachtungen versucht, um zu kontrollieren, ob sich die theoretisch geforderten Konstantenbeziehungen ergeben. Die Untersuchung wurde an der Absorptionskurve des Cyanins (im sichtbaren Gebiet) und jener des Wassers (bei zirka 20 *mm* Wellenlänge, nach Messungen von Möbius, Ann. d. Phys., *62*, 1920) vorgenommen und ergab eine recht gute Anpassung. Für ein abschließendes Urteil wären noch umfassendere Untersuchungen, vor allem aber Beobachtungen an hierfür geeigneten (von anderen weit abstehenden) Eigenschwingungen erforderlich. Für Cyanin wurde obige Bedingung $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \ll p_0$ besser bestätigt gefunden als für Wasser, wo diese Konstanten nahe an p_0 heranrücken $\left(\text{ungefähr } \frac{1}{3} p_0\right)$. Die betrachtete Eigenschwingung des Wassers zeigt eben eine so geringe Anomalie, daß die einfache Dispersionsgleichung auch für die Umgebung von p_0 nicht mehr zutrifft. Der Einfluß der Konstanten $\frac{y}{g}$, beziehungsweise $\frac{y'}{g'}$ ist also anschaulich an der Dispersionskurve zu erkennen.

Es wird sich jetzt darum handeln, zu untersuchen, ob diese Absorptionsgleichung die richtige Lage des Absorptionsmaximums wiedergibt. Soweit Beobachtungen vorliegen (an Farbstoffen und Wasser), lassen sie erkennen, daß das Absorptionsmaximum jedenfalls in der Nähe des Reflexionsmaximums liegt. Da nun die Berechnungen des I. Teils für NaCl und KCl einen großen Unterschied von λ_0 und λ_R ergeben haben, wobei $\lambda_0 < \lambda_R$ ist, wird auch die Bedingung gelten müssen $\lambda_0 < \lambda_A$ (Wellenlänge des Absorp-

tionsmaximums). Daraufhin ist die Absorptionsgleichung zu untersuchen.

Für die Frequenz beim Absorptionsmaximum folgt aus der Absorptionsgleichung (mit den schon bekannten Bedingungen $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'} \leqq p_0$) die Bedingungsgleichung für p_A (ausgewertet für NaCl $\frac{\mathfrak{k}^2}{g} + \frac{l^2}{g'} = 0 \cdot 75\, c_0^2$)

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^6 + \left(\frac{p}{p_0}\right)^4 (1 \cdot {}^4 + 3\,\rho) + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 (-0 \cdot {}^7\,\rho - 1 \cdot {}^2) - 0 \cdot {}^4\,\rho = 0.$$

Es bedeutet

$$\rho = \frac{\frac{gy'}{g'y} + \frac{l^2 g}{\mathfrak{k}^2 g'}}{\frac{gy'}{g'y}\,\frac{l^2 g}{\mathfrak{k}^2 g'} + 1}$$

Die Diskussion dieser Gleichung ergibt folgende Abhängigkeit des λ_A von ρ (bezogen auf NaCl. $\lambda_0 = 38 \cdot 7\ \mu$).

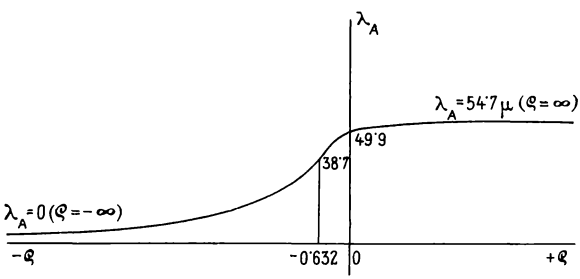

Fig. 2.

Die Konstanten g, y, beziehungsweise g', y' müssen gleiches Vorzeichen haben, damit die stofflichen Schwingungen positiv gedämpft sind. Der Konstantenkomplex $\frac{gy'}{g'y}$ ist also jedenfalls positiv. Negativ kann ρ nur werden, wenn

$\frac{l^2 g}{\mathfrak{k}^2 g'} < 0$ und entweder $\left|\frac{l^2 g}{\mathfrak{k}^2 g'}\right| > \frac{gy'}{g'y}$ und $\frac{gy'}{g'y}\,\frac{l^2 g}{\mathfrak{k}^2 g'} < 1$ oder das Umgekehrte der Fall ist. Da aber $p_0^2 = \frac{z^2}{gg'}$ ist, sind g und g' gleich bezeichnet und daher kann $\frac{l^2 g}{\mathfrak{k}^2 g'}$ nur positiv sein. Die Bedingung $\lambda_A > \lambda_0$ ist also jedenfalls erfüllt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es erübrigt noch, die gleiche Kontrolle wie für die Bedingung $\lambda_A > \lambda_0$ auch direkt für die Bedingung $\lambda_R > \lambda_0$ durchzuführen.

Hierzu müssen in die Reflexionsformel

$$R = \frac{(1-n)^2+\varkappa^2 n^2}{(1+n)^2+\varkappa^2 n^2}$$

n und $\varkappa$ mit ihren Werten gemäß obigen Gleichungen eingesetzt und das Reflexionsmaximum gerechnet werden. Diese Rechnung führt auf die Bedingungsgleichung für p_R (wobei zur Vereinfachung die numerischen Verhältnisse der Absorptionskurven des Cyanins und des Wassers, auf die oben hingewiesen wurde, berücksichtigt wurden)

$$\frac{(\alpha\beta'+2\alpha')\alpha(\Delta_1^2+\Delta_2^2)-6\alpha^2(\Delta_1\Delta_1'+\Delta_2\Delta_2')}{(\alpha\beta'+2\alpha')\alpha(\Delta_1^2+\Delta_2^2)-6\alpha^2(\Delta_1\Delta_1'+\Delta_2\Delta_2')+\frac{2\cdot 7}{(gg')^4}(\Delta_1^2+\Delta_2^2)} \doteq$$

$$\doteq (gg')^4\varepsilon_0 c_0^2\,[(2\cdot{}^5\alpha\beta'+3\alpha')(\Delta_1^2+\Delta_2^2)+2\cdot{}^4\alpha(\Delta_1\Delta_1'+\Delta_2\Delta_2')].$$

Darin bedeuten

$$\alpha = \frac{1}{(gg')^2}(wp^2\Delta_2 - xp\Delta_1),\quad \beta = \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2},\quad \alpha' = \frac{\partial\alpha}{\partial p},\quad \beta' = \frac{\partial\beta}{\partial p}.$$

Für die Berechnung von p_R wäre somit noch die genaue Bestimmung der Werte gg' und $\frac{y}{g}$, beziehungsweise $\frac{y'}{g'}$ erforderlich. $\frac{y}{g}$ und $\frac{y'}{g'}$ wurden schon der Größenordnung nach abgeschätzt, gg' ergibt sich aus obiger Gleichung

$$gg' \doteq 10^{-37},\ \doteq 10^{-28},$$

(für die obgenannte Eigenschwingung des Cyanins, beziehungsweise des Wassers). Dann berechnet sich z^2 aus $p_0^2 \doteq \frac{z^2}{gg'}$

$$z^2 \doteq 10^{-6},\ \doteq 10^{-8}.$$

Mittels der Dispersionsgleichung ist es also möglich, die Werte $\left(\frac{\mathfrak{k}^2}{g}+\frac{l^2}{g'}\right)$, $\frac{y}{g}$, $\frac{y'}{g'}$, gg', z wenigstens der Größenordnung nach richtig zu bestimmen. Macht man noch die (keineswegs feststehende) Voraussetzung $g \doteq g'$, $\mathfrak{k} \doteq l$ und $y \doteq y'$, so kann man die stofflichen Gleichungen für die obgenannten Eigenschwingungen des Cyanins, beziehungsweise des Wassers anschreiben:

$$10^{-19}\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial t} + 10^{-6}\bar{\gamma} + 10^{-3}\bar{\xi} + 10^{1}[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla] + \mathfrak{k}_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e} = 0,$$

$$10^{-19}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t} + 10^{-6}\bar{\xi} - 10^{-3}\bar{\gamma} + 10^{1}[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla] + l_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e} = 0,$$

beziehungsweise

$$10^{-14}\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial t}+10^{-4}\bar{\gamma}+10^{-4}\bar{\xi}+10^{3}[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla]+\mathfrak{k}_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e}=0,$$

$$10^{-14}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t}+10^{-4}\bar{\xi}-10^{-4}\bar{\gamma}+10^{3}[\nabla;\mathfrak{m}-\mathfrak{m};\nabla]+l_3\nabla.\varepsilon_0\mathfrak{e}=0.$$

Ergebnis.

Der Untersuchung wurden die dreikonstantigen Dispersionsformeln für eine Eigenschwingung zugrunde gelegt. Diese schließen das eventuelle Vorhandensein von Eigenschwingungen im Gebiet der Hertz'schen Strahlen mit ein, wodurch praktisch nur der Wert der Konstanten n_0^2 geändert wird. Es wurden folgende Resultate erhalten:

1. Die Dispersionsformeln sind in mathematischer Hinsicht formal identisch, d. h. sie vermögen dieselbe Kurve darzustellen, bloß mit verschiedenen Werten der Konstanten K und λ_0. Diese Konstanten der verschiedenen Formeln stehen dann in einer bestimmten Beziehung zueinander. Genügt also die Dispersionskurve in einem Gebiet, wo sie nur von einer Eigenschwingung in variabler Weise abhängig erscheint, den dreikonstantigen Formeln, so müssen die Konstanten in der berechneten Beziehung stehen. Dies wurde für NaCl und KCl nachgewiesen. Es ergab sich hierbei (ebenso in allen anderen gerechneten Fällen), daß der aus der Dispersionsgleichung nach Ketteler-Helmholtz-Drude folgende λ_0-Wert stets größer, der aus der Jaumann'schen Formel folgende stets kleiner ist als der experimentell ermittelte Wert der Reststrahlenwellenlänge λ_R, während der λ_0-Wert der Planck-Goldhammer'schen Formel nur wenig größer als der Jaumann'sche ist. Die abweichenden Werte des Verhältnisses $\frac{\lambda_R}{\lambda_0}$ bei Ketteler-Drude und bei Planck-Goldhammer sind durch diese Theorien notwendig gefordert, also mit der Theorie in Übereinstimmung.

2. Um eine Entscheidung herbeizuführen, wurde nun in der Jaumann'schen Theorie auch die Absorption berücksichtigt, in welchem Falle die formale Identität der Dispersionsformeln für die verschiedenen Theorien nicht mehr zutrifft. Es wurde gezeigt, daß auch aus der Jaumann'schen Theorie gerade das oben für sie durch die Erfahrung verlangte Verhältnis $\frac{\lambda_R}{\lambda_0}>1$ notwendig folgt (sofern man, im Einklang mit der Erfahrung, λ_A mit λ_R näherungsweise identifiziert). Eine Entscheidung zwischen den Theorien wäre demnach erst auf Grund (noch ausstehender) geeigneter und genauer

Beobachtungen (vollständige Absorptions- und Reflexionskurven einer von anderen weit abstehenden Eigenschwingung) zu erwarten.

3. Es wurde der Versuch gemacht, die Konstanten der stofflichen Gleichungen der Jaumann'schen Theorie zahlenmäßig zu ermitteln. Mit Hilfe der Dispersionserscheinungen ist es vorerst gelungen, einige charakteristische Konstantenkomplexe quantitativ auszuwerten. Die Bestimmung der einzelnen Konstanten selbst wird derzeit noch durch die Komplikation der Rechnung und den Mangel geeigneter Beobachtungen (wie schon erwähnt) erschwert.

Zum Schlusse gedenke ich meines verstorbenen Lehrers G. Jaumann, der mich zu dieser Arbeit anregte, in ergebener Dankbarkeit.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: 135_2a

Autor(en)/Author(s): Hlucka Fr.

Artikel/Article: Vergleich zwischen den Dispersionsformeln der Atomtheorie und der Kontinuitätstheorie. 9-28