Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über Flächen und Kurven gleicher Parallaxe bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen

Von

Franz Wilhelm Palm in Wien

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 27. Oktober 1927)

Für stereophotogrammetrische Aufnahmen sind jene Flächen und Kurven von Interesse, deren Punkte auf den beiden photographischen Platten Bildpunkte ergeben, für welche die Differenzen der gleichnamigen Koordinaten, die wir Parallaxen nennen, konstant sind. H. Dock[1] hat diese Flächen für den Fall wagrechter Hauptachsen, R. Heinz[2] für den Fall windschiefer Hauptachsen nach den Methoden der analytischen Geometrie untersucht. C. Pulfrich[3] hat eine Vorrichtung zur Demonstration der Kurven gleicher Parallaxe beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem nach den Methoden der projektiven Geometrie in vollster Allgemeinheit behandelt.

Flächen gleicher erster Parallaxe.

A. Allgemeine Aufnahmen.

Wir bezeichnen (Fig. 1) die Projektionszentren (optischen Mittelpunkte der Linsen) mit O_1, O_2, die Bildebenen (photographischen Platten) mit Π_1, Π_2, ihre Hauptpunkte mit H_1, H_2, ihre Mittellinien mit h_1, v_1, h_2, v_2. Wir wählen die Mittellinien der Platten als Koordinatenachsen. Wir bezeichnen die Zentralrisse eines Raumpunktes P mit P' und P'' Hat P' die rechtwinkeligen Koordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, P'' die Koordinaten $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, dann bezeichnen wir die Differenz $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{p}$

[1] Hans Dock, Studie über die Herleitung der Abstandsgleichungen für stereophotogrammetrische Aufnahmen mit wagrechten Hauptachsen. Internationales Archiv für Photogrammetrie, Bd. 5, Heft 3, 1917.

Hans Dock, Studie über Form und Lage der Linien gleicher Parallaxe bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen mit wagrechten Hauptachsen. Internationales Archiv für Photogrammetrie, Bd. 5, Heft 4, 1919.

[2] Rudolf Heinz, Die Fläche gleicher Parallaxe bei sich kreuzenden photogrammetrischen Hauptachsen. Internationales Archiv für Photogrammetrie, Bd. 5, Heft 4, 1919.

[3] Carl Pulfrich, Über eine Vorrichtung zur Demonstration der Kurven gleicher Parallaxe. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1912.

Carl Pulfrich, Neue stereoskopische Methoden und Apparate, XXVI. Abschnitt. Verlag Springer, Berlin 1912.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

als erste Parallaxe, die Differenz $\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{q}$ als zweite Parallaxe. Wir bezeichnen die Geraden, welche durch O_1 gehen

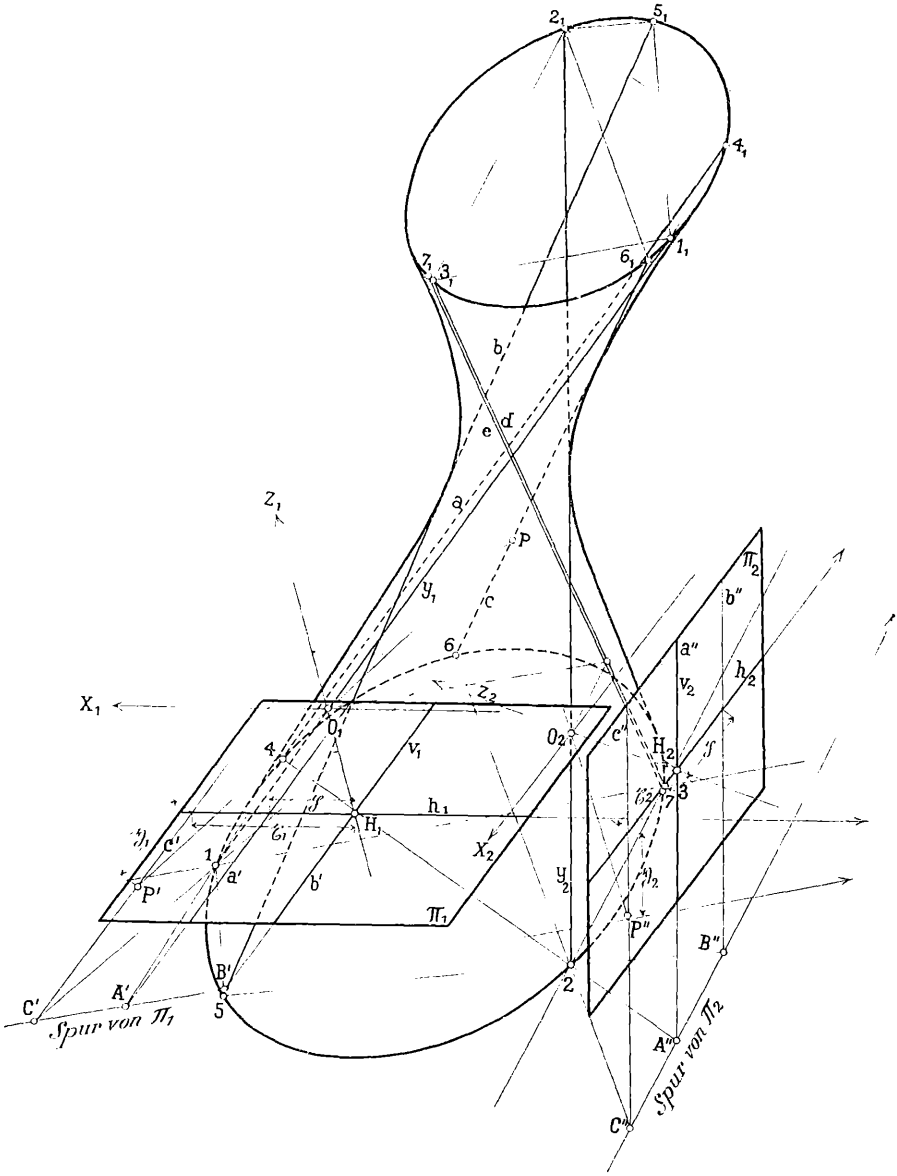

Fig. 1.

und zu h_1, v_1 parallel sind, mit x_1, y_1, die Hauptachse $H_1\ O_1$ mit z_1-entsprechend die Parallelen durch O_2 zu h_2, v_2 mit x_2, y_2, die Haupt, achse $H_2\ O_2$ mit z_2. Wir setzen voraus, daß sowohl x_1, x_2 als auch

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

y_1, y_2 und z_1, z_2 windschief sind. In Fig. 1 werden von den Geraden, Ebenen und von der Fläche gleicher Parallaxe die Spurelemente in zwei parallelen Ebenen dargestellt.

Wir ordnen den Parallelen zur Vertikallinie der ersten Platte $a', b', c', .$ mit den Gleichungen

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{c}_1, .$$

die Parallelen zur Vertikallinie der zweiten Platte a'', b'', c'', mit den Gleichungen

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{c}_2, .$$

so zu, daß

$$\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{c}_2 = . \quad . = \mathfrak{p}$$

ist. In Fig. 1 sind die Geraden a', b', a'', b'' in besonderer Weise angenommen. Ihre Gleichungen sind:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{x}_1 = 0, \quad \mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{p}.$$

Das Parallelstrahlbüschel der Geraden $a', b', c',$ ist kongruent und daher projektiv mit dem Parallelstrahlbüschel der Geraden $a'', b'', c'',$ Projizieren wir das Strahlbüschel $a', b', c',$ aus O_1, so erhalten wir ein Ebenenbüschel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, .$ mit der Achse y_1, projizieren wir das Strahlbüschel $a'', b'', c'',$ aus O_2, so erhalten wir ein Ebenenbüschel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2,$ mit der Achse y_2. Die Spuren der Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ in den parallelen Begrenzungsebenen sind:

$$A'\,1\,4 \parallel 1_1\,4_1, \quad A''\,2\,4 \parallel 2_1\,4_1,$$

$$1\,B'\,5 \parallel 1_1\,5_1, \quad B''\,2\,5 \parallel 2_1\,5_1,$$

$$C'\,1\,6 \parallel 1_1\,6_1, \quad C''\,2\,6 \parallel 2_1\,6_1.$$

Die beiden Ebenenbüschel sind, weil sie zu den projektiven Strahlbüscheln perspektiv sind, projektiv. Die Schnittgeraden $a, b, c,$ entsprechender Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2,$ gehören dem geometrischen Ort der Raumpunkte an, deren Bildpunkte dieselbe erste Parallaxe $\mathfrak{p}$ haben. Das Erzeugnis der beiden projektiven Ebenenbüschel bezeichnen wir als Fläche gleicher erster Parallaxe.

Wir erhalten somit:

I. *Die Fläche gleicher erster Parallaxe ist eine Regelschar zweiter Ordnung, deren Leitschar die Strahlen y_1, y_2 enthält.*[1]

Wie man aus Fig. 1 unmittelbar erkennt, schneidet Π_1 die Fläche Φ. Die Schnittkurve ist in der Figur nicht eingezeichnet. Wählen wir insbesondere $\mathfrak{p} = 0$, so erhalten wir den Ort aller

[1] R. Heinz hat der zitierten Arbeit die Gleichung dieser Fläche aufgestellt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Punkte, die sich parallaxenfrei abbilden, d. h. deren Bildpunkte gleiche Abszissen haben. In diesem Fall sind die die Fläche erzeugenden Ebenenbüschel mit den Achsen y'_1, y'_2 kongruent, daher gilt:

II. *Die Raumpunkte, die sich parallaxenfrei abbilden, erfüllen ein orthogonales Hyperboloid durch* y'_1, y'_2.

Alle ∞^1 Flächen gleicher erster Parallaxe liegen in dem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennlinien y'_1, y'_2. In einem hyperbolischen Strahlnetz liegen aber ∞^3 Regelflächen zweiter Ordnung. Um die Flächen gleicher erster Parallaxe näher zu charakterisieren, betrachten wir ihr Verhalten zur unendlich fernen Ebene. In der nur schematischen Fig. 2 bedeuten i den absoluten Kegelschnitt, $X_{1u}\ Y_{1u}\ Z_{1u}$, $X_{2u}\ Y_{2u}\ Z_{2u}$ die unendlich fernen Punkte von $x_1\ y'_1\ z_1$, $x_2\ y'_2\ z_2$.[1] Da $x_1\ y'_1\ z_1$, $x_2\ y'_2\ z_2$ rechtwinklige Dreibeine sind, bilden ihre unendlich fernen Punkte Poldreiecke des absoluten Kegelschnitts. Der unendlich ferne Kegelschnitt k_u der zur Parallaxe $\mathfrak{p}$ gehörigen Fläche Φ geht durch die Punkte Y_{1u}, Y_{2u} und durch den Schnittpunkt

$$D_u = [X_{1u}\ Y_{1u},\ X_{2u}\ Y_{2u}],$$

weil für einen endlichen Wert von $\mathfrak{p}$ die Verschwindungsebenen $x_1\ y'_1$, $x_2\ y'_2$ einander entsprechen. Zur Bestimmung von zwei weiteren Punkten von k_u wählen wir auf der ersten Platte die Punkte

$$A_1\ (\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{p},\ \mathfrak{y}_1 = 0), \quad B_1\ (\mathfrak{x}_1 = 0,\ \mathfrak{y}_1 = 0),$$

auf der zweiten Platte die Punkte

$$A_2\ (\mathfrak{x}_2 = 0,\ \mathfrak{y}_2 = 0), \quad B_2\ (\mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{p},\ \mathfrak{y}_2 = 0)$$

und ordnen die Ebenen $y'_1\ A_1$, $y'_2\ A_2$, respektive $y'_1\ B_1$, $y'_2\ B_2$ einander zu. Dies entspricht der Annahme der Geraden a', b', a'', b'' der Fig. 1. Wegen der Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle\ A_1\ O_1\ B_1 = \sphericalangle\ A_2\ O_2\ B_2 = \varphi$$

bestimmen die unendlich fernen Punkte ihrer Schenkelpaare mit dem absoluten Kegelschnitt gleiche Doppelverhältnisse. Sind $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}'_1$ die absoluten Punkte der Ebene $x_1\ z_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}'_2$ die absoluten Punkte der Ebene $x_2\ z_2$, $A_{1u}\ B_{1u}$, $A_{2u}\ B_{2u}$ die unendlich fernen Punkte der Schenkel $O_1\ A_1$, $O_1\ B_1$, $O_2\ A_2$, $O_2\ B_2$, so gilt

$$(A_{1u}\ B_{1u}\ \mathfrak{J}_1\ \mathfrak{J}'_1) = (A_{2u}\ B_{2u}\ \mathfrak{J}_2\ \mathfrak{J}'_2) = \mathfrak{d}.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Winkel φ und dem Doppelverhältnis $\mathfrak{d}$ ist durch die Laguerre'sche Formel[2]

---

[1] In Fig. 2 ist der Zeiger u bei allen Spurelementen der unendlich fernen Ebene weggelassen.

[2] E. Laguerre, Nouv. math. 12 (1853), p. 57.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{2i} \log \text{nat } \mathfrak{d}$$

gegeben.

Der Schnittpunkt

$$A_u = (Y_{1u}\, A_{1u},\ Y_{2u}\, A_{2u})$$

ist der unendlich ferne Punkt der Erzeugenden

$$a = (\mathfrak{y}_1\, A_1,\ \mathfrak{y}_2\, A_2),$$

der Schnittpunkt

$$B_u = (Y_{1u}\, B_{1u},\ Y_{2u}\, B_{2u})$$

ist der unendlich ferne Punkt der Erzeugenden

$$b = (\mathfrak{y}_1\, B_1,\ \mathfrak{y}_2\, B_2).$$

Damit sind fünf Punkte Y_{1u}, Y_{2u}, D_u, A_u, B_u von k_u gegeben.

Bestimmen wir in analoger Weise die unendlich fernen Kegelschnitte k_u', k_u'', k_u''' . . der den Werten $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$ entsprechenden Flächen Φ', Φ'', Φ''' . Alle Kegelschnitte gehen durch Y_{1u}, Y_{2u} und D_u. Die Reihe der Punkte A_u, A_u', A_u'' auf $Y_{2u}\, Z_{2u}$ ist perspektiv zur Reihe der Punkte A_{1u}, A_{1u}', A_{1u}'' auf $X_{1u}\, Z_{1u}$, ebenso ist die Reihe der Punkte B_u, B_u', B_u'' auf $Y_{1u}\, Z_{1u}$ perspektiv zu der Reihe der Punkte B_{2u}, B_{2u}', B_{2u}'' auf $X_{2u}\, Z_{2u}$. Aus der Projektivität der Reihen (A_{1u}), (B_{2u}) folgt die Projektivität der Reihen (A_u), (B_u). Da im Schnittpunkt ihrer Träger $Y_{1u}\, Z_{1u}$ und $Y_{2u}\, Z_{2u}$, der der Parallaxe $\mathfrak{p} = 0$ entspricht, die Punkte A_u, B_u vereinigt liegen, sind die Punktreihen A_u, A_u', A_u'', . und B_u, B_u', B_u''. perspektiv mit dem Zentrum S_1. Daraus folgt, daß alle Kegelschnitte k_u, k_u', k_u'', im Punkt D_u dieselbe Tangente t_1 haben. Die Konstruktion der Tangente t_1 mittels des Pascal'schen Satzes ist in Fig. 2 angegeben. Die unendlich fernen Kegelschnitte der Flächen gleicher Parallaxe bilden also ein Kegelschnittbüschel, bei welchem zwei Grundpunkte unendlich nahe zusammengerückt sind. Die Flächen enthalten nicht nur den Netzstrahl d, d. i. die Schnittgerade der Verschwindungsebenen, sondern auch den unendlich benachbarten Strahl e (Fig. 1). Wir können sagen:

III. *Die Flächen gleicher Parallaxe* $\mathfrak{p}$ *bilden ein singuläres Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung. Die Grundkurve des Büschels ist ein windschiefes Vierseit, von welchem zwei Gegenseiten die Brennlinien* y_1, y_2 *des hyperbolischen Strahlnetzes sind, während die zwei anderen Gegenseiten zwei unendlich benachbarte Netzstrahlen* d, e *sind, d. h. die* ∞^1 *Flächen berühren einander längs der Schnittgeraden* d *der beiden Verschwindungsebenen.*

Wir können den Satz III einfach auch so beweisen: Legen wir die Platten Π_1, Π_2 übereinander, so schneiden die beiden kongruenten

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Parallelstrahlbüschel $a', b', c' \ldots$ und a'', b'', c'' die horizontale Mittellinie in gleichlaufenden kongruenten Punktreihen, die auseinander durch eine Verschiebung um $\mathfrak{p}$ entstehen. Fassen wir die gleichlaufenden kongruenten Punktreihen als Grenzfall gleichlaufender ähnlicher Punktreihen auf, so rückt der zweite, vom unendlich fernen Punkt verschiedene Doppelpunkt immer näher an diesen

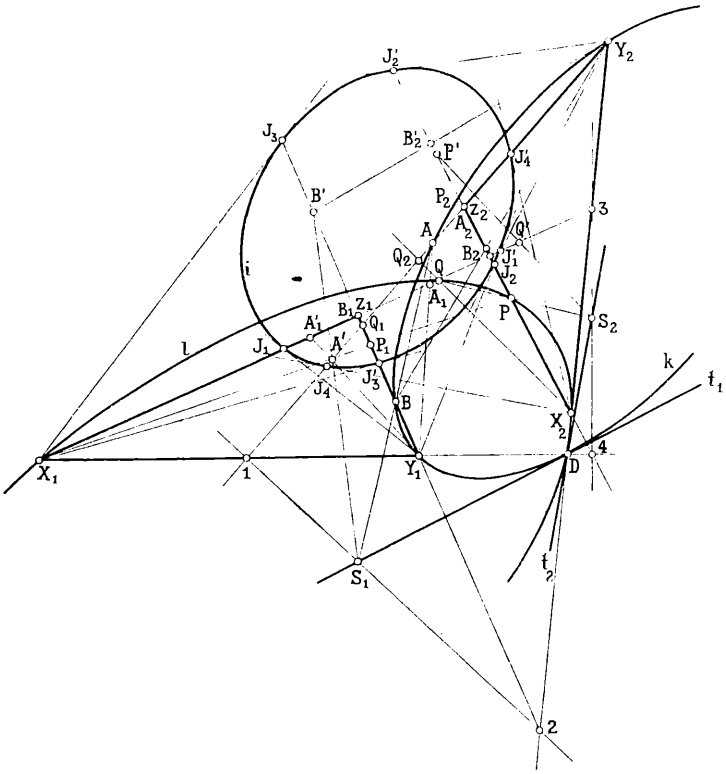

Fig.

heran. Projizieren wir die in Π_1 und Π_2 liegenden Parallelstrahlbüschel aus O_1 und O_2, so entsprechen einander in den Ebenenbüscheln y'_1, y'_2 nicht nur die Verschwindungsebenen $x_1 y'_1$, $x_2 y'_2$, sondern auch die Ebenen, die aus diesen durch eine unendlich kleine Drehung entstehen. Die Fläche gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ geht durch die Schnittgerade d der Verschwindungsebenen und durch die Schnittgerade e der beiden unendlich benachbarten Ebenen. Der Schluß ist nur zulässig, wenn $\mathfrak{p}$ nicht unendlich groß ist. Diese Voraussetzung trifft zu, weil $\mathfrak{p}$ durch die Dimensionen der Platten begrenzt ist. Legen wir dem $\mathfrak{p}$ innerhalb dieser Grenzen alle möglichen Werte bei, so erhalten wir ∞^1 Regelflächen zweiter Ordnung, welche die Achsen der erzeugenden Ebenenbüschel y'_1, y'_2

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und die unendlich benachbarten Netzstrahlen d und e gemeinsam haben. Damit ist der Satz III bewiesen.

Das Kegelschnittbüschel, welches die Flächen gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ in der unendlich fernen Ebene bestimmen, enthält zwei in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte. Sie bestimmen die Richtebenen der zwei in dem Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung enthaltenen hyperbolischen Paraboloide. Eines dieser Paraboloide zerfällt. Der Wert von $\mathfrak{p}$, der dem anderen hyperbolischen Paraboloid entspricht, ist leicht zu ermitteln: Wir ordnen der Ebene durch y_1 parallel zu y_2 die Ebene durch y_2 parallel zu y_1 zu. Die erste Ebene schneidet Π_1 in einer Parallelen zu v_1, die zweite Ebene schneidet Π_2 in einer Parallelen zu v_2. Die Abszissendifferenz dieser beiden Geraden gibt den verlangten Wert von $\mathfrak{p}$ an.

Wenn die Flächen gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ einander längs des Netzstrahls d berühren, so ist nach dem Chasles'schen Satz über die Berührungskorrelation[1] das Büschel der Berührungsebenen projektiv zur Reihe der Berührungspunkte. Wenn man den Ebenen des Büschels d die Punkte von d projektiv zuordnet und in jeder Ebene durch d jenes Strahlbüschel auswählt, dessen Scheitel der entsprechende Punkt ist, so erhält man ein parabolisches Strahlnetz. In einem parabolischen Strahlnetz liegen ∞^3 Regelflächen zweiter Ordnung. Eine Gerade des Raumes g wird von den Ebenen des Büschels d in einer perspektiven Punktreihe geschnitten. Wegen der Berührungskorrelation ist die Punktreihe auf g zur Punktreihe auf d projektiv. Die beiden Punktreihen d und g erzeugen eine in dem parabolischen Netz enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung.

Wir können daher sagen:

IV. *Die Flächen gleicher Parallaxe* $\mathfrak{p}$ *sind die Regelflächen zweiter Ordnung, welche dem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennlinien* y_1, y_2 *und dem parabolischen Strahlnetz mit der Brennlinie* d *gemeinsam sind.*

Die ∞^2 Strahlen des hyperbolischen Netzes y_1, y_2 sind die Doppelstrahlen von ∞^1 gescharten Kollineationen. Durch das Strahlnetz und zwei homologe Punkte P, P', die auf einem Netzstrahl beliebig angenommen werden, ist eine dieser gescharten Kollineationen eindeutig bestimmt. Ordnen wir dem Punkt P insbesondere denjenigen Punkt P' zu, welcher durch die Brennpunkte seines Netzstrahls, d. h. durch die Schnittpunkte des Netzstrahls mit den Brennlinien y_1, y_2 harmonisch getrennt wird, so erhalten wir einen geschart involutorischen Raum, dessen Involutionsachsen die Brennlinien des hyperbolischen Netzes sind. P und P' sind konjugiert bezüglich aller ∞^3 in dem hyperbolischen

[1] Chasles, Sur les surfaces engendrées par une droite. Corr. math. et phys. 11, Bruxelles 1839.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Strahlnetz y_1, y_2 enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung. Drei windschiefe Netzstrahlen des hyperbolischen Strahlnetzes y_1, y_2 bestimmen eine aus lauter Netzstrahlen bestehende Regelschar zweiter Ordnung. Die Leitstrahlen dieser Schar, der auch y_1, y_2 angehören, sind paarweise einander zugeordnet und bilden eine in dem involutorischen Raum enthaltene hyperbolisch involutorische Regelschar, welche die Brennlinien y_1, y_2 zu Doppelstrahlen hat. Drei windschiefe Netzstrahlen des parabolischen Strahlnetzes mit der Brennlinie d bestimmen eine aus lauter Netzstrahlen bestehende Regelschar zweiter Ordnung. Die Leitstrahlen dieser Schar, der auch d angehört, sind paarweise einander zugeordnet und bilden eine in dem involutorischen Raum enthaltene parabolisch involutorische Regelschar, welche die Brennlinie d des parabolischen Strahlnetzes zum Doppelstrahl hat. Es erfolgt also die involutorische Paarung der Leitstrahlen beim ersten Strahlnetz so, daß entsprechende Strahlen durch y_1 und y_2 harmonisch getrennt werden, beim zweiten Strahlnetz so, daß jeder Leitstrahl den Strahl d als entsprechenden Strahl hat. Nun sind für die den beiden Strahlnetzen gemeinsamen Flächen die Strahlen jeder Schar die Leitstrahlen der anderen Schar.

Daher können wir sagen:

V. *Die Flächen gleicher erster Parallaxe sind gleich geschart involutorische Regelflächen zweiter Ordnung.*

Die Pole einer Ebene ε bezüglich aller ∞^3 in dem hyperbolischen Strahlnetz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung liegen in einer Ebene ε_1, welche mit ε ihren Netzstrahl l gemeinsam hat und von ε durch y_1 und y_2 harmonisch getrennt wird, denn y_1, y_2 liegen auf allen ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung des Netzes. Die Ebenen $l y_1$ und $l y_2$ sind die durch den Netzstrahl l an alle ∞^3 Regelflächen legbaren Tangentialebenen. Die Tangentialebenen $l y_1$, $l y_2$ trennen ε harmonisch von der durch ihren Pol E gehenden Ebene ε_1. Die Ebenen des Raumes sind also paarweise konjugiert bezüglich aller ∞^3 in dem hyperbolischen Strahlnetz liegenden Regelflächen zweiter Ordnung. Der unendlich fernen Ebene des geschart involutorischen Raumes mit den Involutionsachsen y_1, y_2 ist eine eigentliche Ebene, die Fluchtebene, zugeordnet. Diese enthält den in der unendlich fernen Ebene liegenden Netzstrahl und die Mittelpunkte aller Punktinvolutionen des involutorischen Raumes. Sie ist folglich zu den beiden Involutionsachsen y_1, y_2 parallel und halbiert ihr gemeinsames Lot. Weil die Fluchtebene der unendlich fernen Ebene bezüglich aller ∞^3 Regelflächen konjugiert ist, enthält sie die Mittelpunkte aller dieser Flächen, unter denen sich die Flächen gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ befinden.

Die Flächen gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ liegen aber auch in dem parabolischen Strahlnetz mit der Brennlinie d, das wir als Grenzfall eines hyperbolischen Strahlnetzes auffassen. Die Mittelpunkte der ∞^3 in diesem Strahlnetz liegenden Regelflächen zweiter Ordnung

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

liegen daher in der Fluchtebene des involutorischen Raumes, dessen Involutionsachsen unendlich benachbart sind. Der Fußpunkt ihres gemeinsamen Lotes in d ist der Zentralpunkt der Erzeugenden d. Da die Flächen gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ die den beiden Strahlnetzen gemeinsamen Regelflächen zweiter Ordnung sind, gilt der Satz:

VI. *Die Mittelpunkte der Flächen gleicher erster Parallaxe liegen auf der Geraden, in der sich die Fluchtebenen der beiden geschart involutorischen Räume schneiden, denen die Flächen angehören.*

Die Konstruktion dieser Mittelpunktsgeraden ist leicht durchzuführen. Die Fluchtebene des ersten involutorischen Raumes ist die Symmetrieebene des gemeinsamen Lotes von y_1, y_2. Die Fluchtebene des zweiten involutorischen Raumes ist die asymptotische Ebene der Erzeugenden d.

Wir gelangen zu dem im Satz VI formulierten Ergebnis auch auf folgendem Wege. Fassen wir die ∞^1 Flächen gleicher erster Parallaxe auf als Inzidenzflächen von ∞^1 polaren Räumen, so sind je zwei dieser Räume zueinander kollinear. Sie erzeugen aber nicht einen tetraedralen oder Reye'schen Komplex, weil die Flächen ein spezielles Büschel von Flächen zweiter Ordnung bilden. Sie sind ja zugleich die ∞^1 Flächen einer Schar von Flächen zweiter Ordnung. Haben die Büschel von Flächen zweiter Ordnung die charakteristische Eigenschaft, die auch als Definition des Büschels[1] dienen kann, daß die Polarebenen eines Punktes bezüglich der ∞^1 Flächen des Büschels ein Ebenenbüschel erster Ordnung bilden, so gilt für die Scharen von Flächen zweiter Ordnung die duale Eigenschaft: die Pole einer Ebene bezüglich der ∞^1 Flächen einer Schar von Flächen zweiter Ordnung bilden eine Punktreihe erster Ordnung. Die Pole der unendlich fernen Ebene bezüglich der ∞^1 Flächen der Schar, d. h. die Mittelpunkte der Flächen gleicher erster Parallaxe bilden eine Punktreihe erster Ordnung.

Schneiden wir das Büschel von Flächen gleicher erster Parallaxe mit einer Ebene, so erhalten wir die in der Ebene liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe. Für diese gilt der Satz:

VII. *Die in einer Ebene liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe bilden ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte die Schnittpunkte der Ebene mit den Seiten des windschiefen Vierseits $y_1\, y_2\, d\, e$ sind.*

Da die Seiten d, e des windschiefen Vierseits unendlich benachbart sind, bilden die in der Ebene liegenden Kurven gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ ein spezielles Kegelschnittbüschel. Die Kegelschnitte

[1] Th. Reye, Geometrie der Lage, III. Bd., p. 43.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gehen durch die Spurpunkte von y_1, y_2 und berühren einander im Spurpunkt von d.

Den Punkten einer Geraden g bezüglich zweier Kegelschnitte k_1, k_2 des Büschels sind die Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel konjugiert, deren Scheitel die Pole G_1, G_2 der Geraden g sind. Das Erzeugnis dieser beiden projektiven Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt, der Ort der doppelt konjugierten Punkte. Wenn zwei Punkte bezüglich zweier Kegelschnitte des Büschels konjugiert sind, so sind sie bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels konjugiert. Der durch die projektiven Strahlbüschel G_1, G_2 erzeugte Kegelschnitt ist der Ort der Pole von g bezüglich der ∞^1 Kegelschnitte des Büschels. Wählen wir g als die unendlich ferne Gerade der Ebene, so sind ihre Pole bezüglich der Kegelschnitte des Büschels die Mittelpunkte derselben. Daher gilt der Satz:

VIII. *Die Mittelpunkte der in einer Ebene liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe liegen auf einem Kegelschnitt, welcher durch die Eckpunkte des allen Kurven gemeinsamen degenerierten Poldreiecks und durch die Halbierungspunkte der von je zwei gemeinsamen Punkten begrenzten Strecken hindurchgeht.*

Denn jeder Pol ist dem Schnittpunkt der Geraden mit der Polaren bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels konjugiert und jeder solche Halbierungspunkt ist der Zentralpunkt der involutorischen Reihen, welche auf den gemeinsamen Geraden des Büschels durch die konjugierten Punkte bezüglich der Kegelschnitte des Büschels zustande kommen.

Wenn ein Punkt P eine Punktreihe g beschreibt, so beschreiben seine Polarebenen π_1, π_2 bezüglich zweier Flächen Φ_1, Φ_2 des Büschels von Flächen gleicher erster Parallaxe zwei zu g projektive Ebenenbüschel um die reziproken Polaren g_1, g_2 von g bezüglich Φ_1 und Φ_2. Die zu P konjugierte Gerade, die Schnittlinie der beiden Ebenen π_1, π_2, beschreibt eine Regelschar zweiter Ordnung.

Die Polaren von g bezüglich der Flächen sind die Leitstrahlen der Schar.[1] Jede Ebene des Büschels mit der Achse g schneidet aus dem Büschel von Flächen gleicher Parallaxe ein Büschel von Kurven gleicher Parallaxe aus. Der Geraden g ist bezüglich dieses Kegelschnittbüschels ein Kegelschnitt konjugiert.

In den ∞^1 Kegelschnittbüscheln, welche durch die ∞^1 Ebenen des Ebenenbüschels aus den ∞^1 Flächen gleicher Parallaxe ausgeschnitten werden, sind der Geraden g ∞^1 Kegelschnitte konjugiert, die auf der Regelfläche zweiter Ordnung liegen, welche der Geraden g bezüglich aller Flächen gleicher Parallaxe kon-

[1] Th. Reye, Geometrie der Lage, III. Bd., p. 46.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jugiert ist. Wählen wir g als unendlich ferne Gerade, so ergibt sich der Satz:

IX. *Die Mittelpunkte der in parallelen Ebenen liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe liegen auf einer Regelfläche zweiter Ordnung.*

Jeder unendlich fernen Geraden ist eine Regelfläche zweiter Ordnung als Ort der Mittelpunkte aller ebenen Kurven gleicher Parallaxe konjugiert, deren Stellung durch die unendlich ferne Gerade gegeben ist. Den ∞^2 Geraden der unendlich fernen Ebene sind ∞^2 Regelflächen als Träger der Mittelpunkte von ebenen Kurven gleicher Parallaxe zugeordnet. Da die Pole der unendlich fernen Ebene bezüglich der Flächen gleicher Parallaxe auf einer Geraden liegen (Satz VI), gilt:

X. *Die Mittelpunkte aller ∞^1 ebenen Kurven gleicher Parallaxe bilden ein spezielles Bündel von Flächen zweiter Ordnung. Auf einer Fläche des Bündels liegen die Mittelpunkte aller ebenen Kurven gleicher Parallaxe, deren Ebenen parallel sind. Die ∞^2 Flächen des Bündels gehen durch eine Gerade, daher zerfällt die Kernkurve*[1] *sechster Ordnung des Bündels in lauter Geraden.*

B. Besondere Aufnahmen.

Wir erhalten die verschiedenen Sonderfälle durch die Annahmen besonderer gegenseitiger Lagen der Achsen der rechtwinkligen Achsenkreuze $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$. Wir wollen die üblichen Bezeichnungen verkantete, verschwenkte, gekippte Aufnahmen etwas allgemeiner fassen, als dies in der photogrammmetrischen Praxis geschieht. Wir wollen durch diese Bezeichnungen die relative Lage der Bildebenen und Hauptachsen zum Ausdruck bringen, unbekümmert um die absolute Aufstellung der Platten im Raum. Es kommt also eine Bezugnahme auf die lotrechte Aufstellung einer Bildebene, die in der Praxis besondere Bedeutung hat, nicht in Betracht. Wir nennen zwei Aufnahmen verkantet, verschwenkt, gekippt, wenn nur die beiden z-Richtungen, respektive die y-, x-Richtungen übereinstimmen, während die beiden anderen Achsenpaare gegeneinander um einen Winkel α gedreht erscheinen, den wir den Winkel der Verkantung, Verschwenkung oder Kippung nennen.

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich durch die Annahme parallel gestellter Achsenkreuze. Wir nennen diese Aufnahmen gleich orientierte Aufnahmen[2] und reihen hier den in der photo-

[1] Th. Reye nennt den Ort der Spitzen der in dem Bündel von Flächen zweiter Ordnung enthaltenen Kegel die Kernkurve des Bündels.
Th. Reye, Geometrie der Lage, III. Bd., p. 138, 139.

[2] In der photogrammetrischen Literatur bezeichnet als parallel verschwenkte Aufnahmen. H. Dock, Photogrammetrie und Stereophotogrammmetrie. Berlin, 1923.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

grammetrischen Literatur als Normalfall bezeichneten Fall ein. Schließlich wäre noch der Fall sich schneidender Achsen zu erwähnen, wie er z. B. bei Panoramenaufnahmen auftritt.

1. Panoramenaufnahmen.

Die Achsen y_1, y_2 schneiden sich in einem Punkt S. Das hyperbolische Strahlnetz, in dem alle Flächen gleicher Parallaxe liegen, artet aus. Es besteht aus den Strahlen der Verbindungsebene $y_1 y_2$ und aus den Strahlen des Bündels S.

XI. *Die Flächen gleicher Parallaxe* $\mathfrak{p}$ *bilden ein Büschel von Kegeln zweiter Ordnung, welche die Mantellinien* y_1, y_2, d *gemeinsam haben und einander längs* d *berühren.*

Für $\mathfrak{p} = 0$ sind die den Kegel erzeugenden projektiven Ebenenbüschel kongruent, daher gilt:

XI*a. Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem orthogonalen Kegel.*

2. Verkantete Aufnahmen.

Die Aufnahmerichtungen stimmen überein, die Bildebenen sind parallel.

XII. *Die Flächen gleicher Parallaxe* $\mathfrak{p}$ *sind hyperbolische Paraboloide. Alle Flächen haben die durch die Stellung der Bildebenen gegebene Richtebene gemeinsam, während die* ∞^1 *zweiten Richtebenen ein Ebenenbüschel bilden, dessen Achse den Verkantungswinkel halbiert.*

XII*a. Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid, welches zerfällt, wenn die Platten Ausschnitte derselben Ebene sind.*

3. Gekippte Aufnahmen.

Die horizontalen Mittellinien der beiden Platten sind parallel.

XIII. *Die Flächen gleicher Parallaxe sind einschalige Hyperboloide.*

XIII*a. Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid, von welchem die eine Richtebene zu* z_1 *und* z_2 *parallel ist, während die zweite die Symmetrieebene von* $z_1 z_2$ *ist.*

4. Verschwenkte Aufnahmen.

Die Vertikallinien der beiden Platten sind parallel. Die Flächen gleicher Parallaxe $\mathfrak{p}$ ergeben sich als Erzeugnisse projektiver Ebenenbüschel, deren Achsen y_1, y_2 parallel sind.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

XIV. *Die Flächen gleicher Parallaxe* $\mathfrak{p}$ *bilden ein Büschel von Zylindern zweiter Ordnung, welche durch* y_1, y_2 *gehen und sich der Schnittgeraden d der beiden Verschwindungsebenen berühren.*[1]

Für $\mathfrak{p} = 0$ sind die den Zylinder erzeugenden projektiven Ebenenbüschel kongruent, daher gilt:

XIV*a. Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem Drehzylinder.*

Dies ist das einzige Auftreten von Drehflächen unter den Flächen gleicher Parallaxe. Beim allgemeinen Fall enthält das Flächenbüschel keine Drehflächen, weil deren unendlich ferne Kurven durch vier gegebene Punkte gehen und den absoluten Kegelschnitt doppelt berühren müßten.

Der Querschnitt des Zylinderbüschels ist das Büschel von Kegelschnitten, welche durch die Spurpunkte von y_1, y_2, d gehen und sich im letzteren Spurpunkt berühren. Unter diesen Kurven gleicher Parallaxe finden wir den $\mathfrak{p} = 0$ entsprechenden Kreis als Erzeugnis gleichlaufend kongruenter Strahlbüschel. Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel ermöglicht eine einfache konstruktive Behandlung. Für den Kegelschnitt ihrer Mittelpunkte sind auf Grund des Satzes VIII unmittelbar fünf Punkte gegeben. In der photogrammetrischen Praxis wird zwischen einem Konvergenzfall und einem Divergenzfall[2] unterschieden. Diese Unterscheidung fällt bei der projektiven Behandlung des Problems weg.

5. Gleich orientierte Aufnahmen.

Die Achsenkreuze $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ sind parallel gestellt. Es sind also nicht bloß die Achsen y_1, y_2 der die Flächen gleicher Parallaxe erzeugenden Ebenenbüschel parallel, sondern auch die Verschwindungsebenen. Die Zylinder haben zwei unendlich benachbarte unendlich ferne Mantellinien gemeinsam, daher gilt:

XV. *Die Flächen gleicher Parallaxe* $\mathfrak{p}$ *bilden ein Büschel ähnlicher parabolischer Zylinder durch* y_1, y_2.

---

[1] Die Untersuchungen von H. Dock erstrecken sich auf die Sonderfälle 4 und 5. Dabei spielt die lotrechte Aufstellung der Bildebenen eine wesentliche Rolle. Daß die Flächen gleicher Parallaxe Zylinderflächen durch drei Geraden sind, finden wir auch in der zitierten Arbeit. Doch scheint Herrn Dr. Dock entgangen zu sein, daß d die Schnittgerade der beiden Verschwindungsebenen ist, daß also d nicht nur in der durch O_1 parallel zu Π_1 gelegten Ebene, sondern auch in der durch O_2 parallel zu Π_2 gelegten Ebene liegt, ferner daß die Flächen gleicher Parallaxe ein Büschel von einander längs d berührenden Zylinderflächen bilden. In der zitierten Arbeit ist für den Querschnitt des Zylinderbüschels die Kurve der Mittelpunkte angegeben. Unsere projektiven Untersuchungen gelten nicht nur für den Querschnitt, sondern für jeden beliebigen Schnitt.

[2] H. Lüscher, Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie) Verlag Teubner, Leipzig, 1920.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Für $\mathfrak{p} = 0$ haben die beiden die Fläche erzeugenden Ebenenbüschel mit den Achsen y'_1, y'_2 die Verbindungsebene $y'_1 y'_2$ entsprechend gemeinsam, sind also perspektiv, daher gilt:

XV*a*. *Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem Ebenenpaar, nämlich der Verbindungsebene* $y'_1 y'_2$ *und der unendlich fernen Ebene.*

Der Querschnitt des Büschels parabolischer Zylinder ist ein Büschel ähnlicher Parabeln.

Wenn die beiden gleich orientierten Platten Ausschnitte derselben Ebene sind, liegt der sogenannte »Normalfall« vor. Die beiden projektiven Ebenenbüschel haben die Verschwindungsebenen entsprechend gemeinsam, sind also perspektiv. Daher gilt:

XVI. *Die Flächen gleicher Parallaxe bilden ein singuläres Büschel von in parallele Ebenenpaare zerfallenden Zylindern.*

XVI*a* ist mit XV*a* gleichlautend.

Der Querschnitt des Büschels von in parallele Ebenen zerfallenden Zylindern ist ein Büschel von in parallele Geradenpaare zerfallenden ähnlichen Parabeln. Eine dieser Geraden ist $O'_1 O'_2$.[1]

Flächen gleicher zweiter Parallaxe.

Wir ordnen den Parallelen zur Mittellinie h_1 der ersten Platte a', b', c' mit den Gleichungen

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{c}_1, \ldots$$

die Parallelen zur Mittellinie h_2 der zweiten Platte $a'', b'', c'', \ldots$ mit den Gleichungen

$$\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{c}_2, \ldots$$

so zu, daß

$$\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{c}_2 = \ldots = \mathfrak{q}.$$

Projizieren wir das Parallelstrahlbüschel der Geraden $a', b', c', \ldots$ aus O_1, das Parallelstrahlbüschel der Geraden $a'', b'', c'', \ldots$ aus O_2, so erhalten wir ein Ebenenbüschel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ mit der Achse x_1 und ein Ebenenbüschel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ mit der Achse x_2. Die beiden Ebenenbüschel sind, weil sie zu den kongruenten und daher projektiven Parallelstrahlbüscheln perspektiv sind, zueinander projektiv. Ihr Erzeugnis bezeichnen wir als Fläche gleicher zweiter Parallaxe $\mathfrak{q}$. Wir erhalten den zu Satz I analogen Satz:

I*. *Die Fläche gleicher zweiter Parallaxe* $\mathfrak{q}$ *ist eine Regelschar zweiter Ordnung, deren Leitschar die Strahlen* x_1, x_2 *enthält.*

---

[1] Der fünfte Sonderfall: gleich orientierte Aufnahmen, ist in den Arbeiten von Dock, Heinz und Pulfrich behandelt. Gewöhnlich wird bei XVI die Ebene $y'_1 y'_2$ weggelassen und nur die dazu parallele Ebene als Fläche gleicher Parallaxe bezeichnet.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Für die Flächen gleicher zweiter Parallaxe $\mathfrak{q}$ übernehmen die Geraden x_1, x_2 dieselbe Rolle, die für die Flächen gleicher erster Parallaxe $\mathfrak{p}$ die Geraden y_1, y_2 spielen. Wir können also den Sätzen I bis X zehn gleichlautende Sätze I* bis X* gegenüberstellen. Auf einen Umstand möchten wir besonders hinweisen. Die ∞^1 Flächen gleicher erster Parallaxe gehen durch die Schnittgerade d der beiden Verschwindungsebenen und durch die Schnittgerade e der Ebenen, die aus den Verschwindungsebenen durch eine unendlich kleine Drehung um die Achsen y_1, y_2 entstehen. Analog gilt für die ∞^1 Flächen gleicher zweiter Parallaxe: Sie gehen durch die Schnittgerade d der beiden Verschwindungsebenen und durch die Schnittgerade f der Ebenen, die aus den Verschwindungsebenen durch eine unendlich kleine Drehung um die Achsen x_1, x_2 entstehen. Es gilt also:

III*. *Die Flächen gleicher zweiter Parallaxe bilden ein singuläres Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung. Die Grundkurve des Büschels ist ein windschiefes Vierseit, von welchem zwei Gegenseiten die Brennlinien x_1, x_2 des hyperbolischen Netzes sind, während die zwei anderen Gegenseiten zwei unendlich benachbarte Netzstrahlen d, f sind, d. h. die ∞^1 Flächen berühren einander längs der Schnittgeraden d der beiden Verschwindungsebenen.*

Es berühren sich demnach längs d nicht nur die Flächen gleicher erster Parallaxe, sondern auch die Flächen gleicher zweiter Parallaxe, aber die beiden Berührungskorrelationen sind verschieden. Diese Tatsache veranschaulicht sehr deutlich die schematische Fig. 2. Der unendlich ferne Kegelschnitt l_u der Fläche gleicher zweiter Parallaxe Ψ geht durch die Punkte X_{1u}, X_{2u} und D_u. Wir bestimmen zwei weitere Punkte P_u, Q_u genau so wie früher die Punkte A_u, B_u für den Kegelschnitt k_u. Wir treffen unter den Ebenen der Büschel x_1, x_2 folgende Auswahl: Wir ordnen den Geraden $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}_1 = 0$ von Π_1 die Geraden $\mathfrak{y}_2 = 0$, $\mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{q}$ von Π_2 zu. Die diese Geraden aus O_1, respektive O_2 projizierenden Ebenen bestimmen zwei Strahlen p, q der Regelschar Ψ. Die unendlich fernen Punkte von p, q sind die Punkte P_u, Q_u. Die den Werten $\mathfrak{q}', \mathfrak{q}'', \mathfrak{q}''', \ldots$ entsprechenden Flächen $\Psi', \Psi'', \Psi''', \ldots$ haben unendlich ferne Kegelschnitte $l_u', l_u'', l_u''', \ldots$, welche durch X_{1u}, X_{2u}, D_u gehen und je ein Punktepaar $P_u' Q_u'$, $P_u'' Q_u''$, $P_u''' Q_u'''$, $\ldots$ enthalten, das analog wie $P_u Q_u$ zustande kommt. Die Reihe der Punkte $P_u P_u' P_u'' P_u'''$ $\ldots$ auf $X_{2u} Z_{2u}$ ist zur Reihe der Punkte $Q_u Q_u' Q_u'' Q_u'''$ $\ldots$ auf $X_{1u} Z_{1u}$ perspektiv mit dem Zentrum S_2. Daraus folgt, daß alle Kegelschnitte $l_u, l_u', l_u'', l_u''', \ldots$ im Punkt D_u dieselbe Tangente t_2 haben. Die Konstruktion der Tangente t_2 mittels des Pascal'schen Satzes ist in Fig. 2 angegeben.

Der zu Satz IV analoge Satz IV* besagt, daß die Flächen gleicher zweiter Parallaxe die dem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennlinien x_1, x_2 und dem parabolischen Strahlnetz mit der Brenn-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

linie d gemeinsamen Regelflächen zweiter Ordnung sind. Die Flächen Φ gleicher erster Parallaxe und die Flächen Ψ gleicher zweiter Parallaxe liegen in parabolischen Strahlnetzen mit gemeinsamer Brennlinie d. Einer Tangentialebene π durch d entspricht in der Berührungskorrelation, die zu Φ gehört, ein Berührungspunkt P_1, in der Berührungskorrelation, die zu Ψ gehört, ein Berührungspunkt P_2. Nach dem Chasles'schen Satz ist das Büschel der Berührungsebenen π projektiv zur Reihe der Berührungspunkte P_1 und zur Reihe der Berührungspunkte P_2. Daher sind die zwei Reihen von Berührungspunkten P_1 und P_2 projektiv und haben zwei reelle getrennte, zwei reelle zusammenfallende oder zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte D_1 D_2, d. h. es gibt zwei Tangentialebenen durch d, deren Berührungspunktepaare sich decken.

Anders ausgedrückt: Die zwei parabolischen Strahlnetze mit derselben Brennlinie d haben zwei Strahlbüschel gemeinsam. Die Strahlen dieser Büschel sind die gemeinsamen Tangenten in den zwei Punkten D_1, D_2, in denen sich die Flächen berühren.

Wir erhalten also den folgenden Satz über den Zusammenhang der beiden singulären Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung:

XVII. *Alle ∞^1 Flächen gleicher erster Parallaxe berühren alle ∞^1 Flächen gleicher zweiter Parallaxe in den Doppelpunkten der beiden projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden der Verschwindungsebenen.*

Die konstruktive Behandlung der Berührungskorrelationen erfolgt durch Verwendung der Spuren der Tangentialebenen. Die Vervollständigung wird am einfachsten durch Einpassen mit dem Papierstreifen durchgeführt.

Wir verzichten auf die Übertragung der Resultate des Kapitels »Besondere Aufnahmen« auf die Flächen gleicher zweiter Parallaxe.

Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe.

I.

Bringen wir jede Fläche Φ des Büschels von Flächen gleicher erster Parallaxe mit jeder Fläche Ψ des Büschels von Flächen gleicher zweiter Parallaxe zum Schnitt, so erhalten wir ∞^2 Kurven, deren Punkte Bildpunkte mit konstanter Abszissendifferenz p und mit konstanter Ordinatendifferenz q haben.

Wir nennen eine solche Kurve eine Kurve gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe. Da alle Flächen Φ und alle Flächen Ψ die Schnittgerade d der beiden Verschwindungsebenen enthalten, sind die ∞^2 Schnittkurven Raumkurven dritter Ordnung. Die Projektionszentren O_1 und O_2 liegen auf den ∞^1 Flächen Φ und auf den ∞^1 Flächen Ψ, daher auch auf den ∞^2 Raumkurven dritter Ordnung. Nach Satz XVII berühren die ∞^1 Flächen Φ die

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

∞^1 Flächen Ψ in den Doppelpunkten der beiden projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden der Verschwindungsebenen, daher müssen die ∞^2 Schnittkurven in den Berührungspunkten D_1, D_2 der Flächen Doppelpunkte haben. Wir können zusammenfassend sagen:

XVIII. *Die ∞^2 Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe sind Raumkurven dritter Ordnung, welche durch die Projektionszentren O_1 und O_2 und durch die Doppelpunkte D_1, D_2 der projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden d der beiden Verschwindungsebenen hindurchgehen.*

Projizieren wir die ∞^2 Schnittkurven aus O_1 und O_2, so erhalten wir je ∞^2 Kegel zweiter Ordnung und in ihren Spurkurven in Π_1 und Π_2 je ∞^2 Kegelschnitte. Die Bildkurven in Π_1 gehen durch O_2', D_1', D_2', die Bildkurven in Π_2 durch O_1'', D_1'', D_2''. Die Punkte D_1, D_2 liegen in beiden Verschwindungsebenen, daher liegen ihre Bildpunkte D_1', D_1'', D_2', D_2'' unendlich fern. Die Bildkurven der ∞^2 Kurven haben dieselben unendlich fernen Punkte, sind also ähnliche Kegelschnitte. Wir können daher sagen:

XIX. *Die Bildkurven der Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe bilden die Bündel von ähnlichen Kegelschnitten, welche durch O_2', respektive O_1'' gehen. Je nachdem die Doppelpunkte D_1, D_2 der projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden d der Verschwindungsebenen reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, erhalten wir Bündel ähnlicher Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen.*

Wir verzichten auf eine Behandlung der vielen möglichen Kombinationen von Sonderfällen der Flächen gleicher erster Parallaxe und der gleicher zweiter Parallaxe.

II.

Wir können zu den Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe unabhängig von den Fächen Φ und Ψ auch auf direktem Wege gelangen. Wir ordnen jedem Punkt P' $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ in Π_1 den Punkt P'' $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2)$ in Π_2 so zu, daß

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{q}$$

ist, d. h. wir ordnen dem ebenen Feld Π_1 das in der Richtung von h_2 um $-\mathfrak{p}$, in der Richtung von v_2 um $-\mathfrak{q}$ verschobene Feld Π_2 zu. Die Bündel, welche diese Felder aus O_1 und O_2 projizieren, sind kollinear und erzeugen eine Strahlkongruenz erster Ordnung dritter Klasse, die Bisekantenkongruenz einer Raumkurve dritter Ordnung, welche durch die Scheitel O_1, O_2 der erzeugenden Bündel hindurchgeht. Die Raumkurve dritter Ordnung ist der Ort der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

singulären Punkte[1] der Kongruenz, d. h. der Punkte, in denen sich homologe Strahlen der Bündel schneiden. Damit ist gezeigt, daß die Punkte gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe auf einer kubischen Raumkurve liegen.

Die Ebenen des Bündels O_1 durch die Geraden in Π_1

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}_1 = 0,\ \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{q},\ \mathfrak{y}_1 = 0$$

schneiden die Ebenen des Bündels O_2 durch die Geraden in Π_2:

$$\mathfrak{x}_2 = 0,\ \mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{p},\ \mathfrak{y}_2 = 0,\ \mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{q}$$

in vier Bisekanten der kubischen Raumkurve. Die Raumkurve dritter Ordnung ist durch die Punkte O_1, O_2 und die vier Bisekanten eindeutig bestimmt und kann etwa in der von Reye[2] angegebenen Weise linear konstruiert werden.

Wir können auch die Tangenten der kubischen Raumkurve in den Punkten O_1, O_2 sehr einfach ermitteln. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes O_2' mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, die Koordinaten der Punktes O_1'' mit $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, so geht die Tangente in O_2 durch den Punkt von Π_2 mit den Koordinaten $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{q}$ und die Tangente in O_1 durch den Punkt von Π_1 mit den Koordinaten $\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{q}$.

Sonderfälle.

1. Die Bündel O_1, O_2 haben eine Ebene entsprechend gemeinsam. Das Erzeugnis der kollinearen Bündel ist eine Strahlkongruenz erster Ordnung zweiter Klasse. Der Fall tritt bei allgemeinen Aufnahmen nicht ein, wohl aber bei verschwenkten und bei gekippten Aufnahmen. Für diese gilt:

XX. *Bei verschwenkten und bei gekippten Aufnahmen gibt es* ∞^1 *Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe, welche in einen Kegelschnitt und eine seiner Unisekanten zerfallen. Diese Kurven entsprechen einem beliebigen Wert von* $\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{p}$) *und einem festen Wert von* $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{q}$), *welcher durch die einzige gemeinsame doppelprojizierende Ebene gegeben ist.*

2. Die Bündel O_1, O_2 haben einen Strahl entsprechend gemeinsam, aber nicht alle durch ihn gehenden Ebenen. Das Erzeugnis der kollinearen Bündel ist eine lineare Strahlkongruenz oder ein Strahlnetz. Die kubische Raumkurve zerfällt in drei Geraden, nämlich in die Gerade $O_1\,O_2$ und die Brennlinien u, v des Strahlnetzes. Die Bündel O_1, O_2 haben zwei Ebenen entsprechend gemeinsam, d. s. die projizierenden Ebenen der Brennlinien u, v.

---

[1] Th. Reye, Geom. d. Lage, II. Bd., p. 160.

[2] Th. Reye, Geom. d. Lage, II. Bd., p. 171.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der Fall tritt ein, wenn die Bildpunkte O_2', O_1'' der Projektionszentren entsprechende Punkte der kongruenten ebenen Felder Π_1, Π_2 sind.

XXI. *Unter den ∞^2 Zahlenpaaren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gibt es ein einziges, für welches die Kurve gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe in drei Geraden zerfällt. Dieses Zahlenpaar ist durch die Parallaxen der Bildpunkte der Projektionszentren gegeben.*

Die Bildkurven sind die einzigen zerfallenden Kegelschnitte in den Bündeln ähnlicher Kegelschnitte durch die Bildpunkte der Projektionszentren.

Je nachdem die Punkte D_1, D_2 reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, erhalten wir zwei reelle getrennte Geraden durch O_2', O_1'', respektive zwei reelle zusammenfallende oder zwei konjugiert imaginäre Geraden. Die Konstruktion der Brennlinien u, v kann so durchgeführt werden: $O_1\ O_2$ ist ein Netzstrahl. Wir bestimmen drei weitere Netzstrahlen a, b, c als Schnittgeraden homologer Ebenen der Sehstrahlenbündel. Die Brennlinien sind die Geraden, welche mit diesen vier Netzstrahlen inzident sind.

3. Die Bündel O_1, O_2 haben drei Ebenen entsprechend gemeinsam. Wenn die Bündel drei Ebenen gemeinsam haben, dann haben sie alle Ebenen des Büschels $O_1\ O_2$ entsprechend gemeinsam. Die Bündel sind perspektiv kollinear, sie sind Scheine einer Ebene, der Perspektivitätsebene.

XXII. *Alle Punkte gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe liegen in einer Ebene, wenn die Sehstrahlenbündel alle doppeltprojizierenden Ebenen entsprechend gemeinsam haben.*

Diese Voraussetzungen sind beim Normalfall gegeben, wenn wir $\mathfrak{p}$ beliebig, $\mathfrak{q} = 0$ annehmen. Wählen wir insbesondere $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{q} = 0$, so erhalten wir als Ort aller Punkte, die sich in beiden Richtungen parallaxenfrei abbilden, die unendlich ferne Ebene.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 136_2a

Autor(en)/Author(s): Palm Franz Wilhelm

Artikel/Article: Ober Flächen und Kurven gleicher Parallaxe bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen. 569-587