Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Die Bemessung des Endquerrahmens offener Brücken

Von

Ing. Dr. Friedrich Schweda, Wien

(Mit 10 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. Jänner 1928)

Das Problem der Knicksicherheit der Druckgurte offener Brücken wurde erstmalig von Engesser behandelt, der schon im Jahre 1884[1] die bekannte, seinen Namen tragende Näherungsformel entwickelte, die im Wesen auf den Annahmen stetig verteilter Querstützung und sinusförmigen Verlaufes der elastischen Linie aufgebaut ist und den Vorzug großer Einfachheit besitzt. Die grundlegenden Untersuchungen rühren von Müller-Breslau[2] und insbesondere Zimmermann[3] her; doch führt die möglichst voraussetzungslose Behandlung des Problems zu recht umfangreichen Zahlenrechnungen, ist also für die Praxis wenig geeignet. Man hat daher nach Näherungslösungen gesucht, die den Vorteil einer einfachen Endformel mit dem Streben nach einer genaueren Erfassung der tatsächlichen Verhältnisse verbinden. Eine solche Näherung erhält man durch die Annahmen unveränderlicher Gurtkraft und Querstützung, unveränderlichen Trägheitsmomentes des Gurtes und gleicher Feldweiten. Die Elastizitätsgleichungen nehmen dann die Form von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten an, deren Lösung leicht anzugeben ist. Auf diese Weise hat Bleich[4] den geraden Stab mit gelenkiger Festhaltung der Enden behandelt und ist zu einem für praktische Zwecke sehr geeigneten Endergebnis gelangt. Im folgenden wird der gleiche Weg beschritten, jedoch die Voraussetzung unverschieblicher Festhaltung der Stabenden fallen gelassen und neben dem Problem der Knickung auch das der Biegung untersucht, welches sich von jenem bekanntlich nur dadurch unterscheidet, daß das zugehörige System der Elastizitätsgleichungen nicht homogen ist. Das erstere führt uns zu einem Ausdruck für den im Knickfall notwendigen Wert des Endrahmenwiderstandes, der eine Darstellung in Tafelform zuläßt; die Lösung des letzteren

---

[1] Zentralblatt der Bauverwaltung, 1884, p. 415.

[2] Graphische Statik, Bd. II.

[3] Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1905, 1907, 1909; ferner: Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, Berlin 1910.

[4] Dr. Ing. Friedrich Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin 1924.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gibt uns die Möglichkeit, zusätzliche Biegungsspannungen im Gurt und in den Querrahmen zu ermitteln.

Wir betrachten den etwas allgemeineren Fall eines Trägers mit schrägem Abschluß (Fig. 1), da der Träger mit lotrechtem Abschluß nur einen Sonderfall von diesem darstellt. Tragwerk und Belastung seien symmetrisch zur Brückenachse und Brückenmitte. Die Anzahl der rechteckigen Felder ist $2n$. Die Bezeichnung der Knotenpunkte erfolgt von der Mitte aus mit 0 bis $(n+1)$, beziehungsweise 0 bis $-(n+1)$. Die Belastung habe überdies eine derartige Verteilung, daß alle Mittelquerträger von $(n-1)$ bis $-(n-1)$ die gleiche, die beiden Endquerträger n, beziehungsweise $-n$ eine davon verschiedene oder gar keine Last tragen.

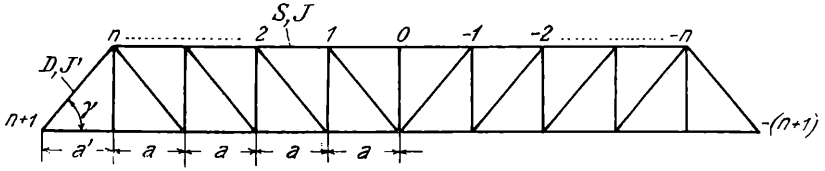

Fig. 1.

Es bedeuten ferner:

a = die Feldweite der rechteckigen Mittelfelder,
a' = des dreieckigen Endfeldes,
S = die unveränderliche Gurtkraft zwischen den Knoten n und $-n$,
D = die Druckkraft in der schrägen Anlaufstrebe,
J = das konstante Trägheitsmoment des Gurtes senkrecht zur Ebene der Tragwand zwischen den Knoten n und $-n$,
J' = jenes der Endstrebe in gleichem Sinne wie J,
W = Rahmenwiderstand der Mittelrahmen, Knoten $(n-1)$ bis $-(n-1)$,
W_o = Rahmenwiderstand des Endrahmens, Knoten n, beziehungsweise $-n$, wobei unter der üblichen Bezeichnung »Rahmenwiderstand« jene beiden horizontalen Kräfte verstanden sind, die, in den beiden Rahmenköpfen gegeneinander wirkend, Verschiebungen derselben um die Längeneinheit zur Folge haben,
γ = Neigungswinkel der Endstrebe.

1. Die Differenzengleichung des Problems.

Das zu behandelnde Problem ist das eines unter zentrisch-achsialem Druck stehenden geraden Stabes, der in einzelnen voneinander gleich weit entfernten Punkten elastisch gestützt ist. Unter der Wirkung der Belastung wird der Stab aus seiner ursprünglich geraden Lage in eine gebogene Form übergehen (Fig. 2). Die dadurch in den Knotenpunkten entstehenden Gurtmomente M_x und die Abweichungen der Knotenpunkte von der Ausgangsgeraden y_x

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

sind die Unbekannten des Problems. Zur Lösung stehen uns zwei Gleichungsgruppen zur Verfügung, die wir — im Sinne Zimmermann's, dem wir auch die nachfolgende Herleitung derselben entnehmen[1] — Stetigkeitsbedingungen und Stützengleichungen nennen.

a) Die Stetigkeitsbedingungen.

Aus dem verformten Stab schneiden wir irgendein Feld, etwa $x \ldots x+1$ unmittelbar neben den Knoten heraus, bringen in den

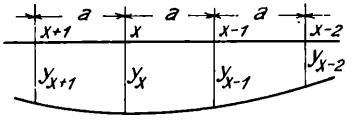

Fig.

Schnittstellen die dort wirkenden Kräfte und Momente an und untersuchen die Formänderung dieses Stabstückes (Fig. 3). Die konvexe Seite der Krümmung möge hiebei dem Brückeninnern zugekehrt sein. Wir beziehen das Feld auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen ξ-Achse mit der ursprünglichen Stabachse zusammenfällt und dessen y-Achse durch den linken Endpunkt des Stabes geht. Die Kräfte, von welchen das Feld ergriffen wird, sind zunächst die in den Endpunkten x und $x+1$ in Richtung der

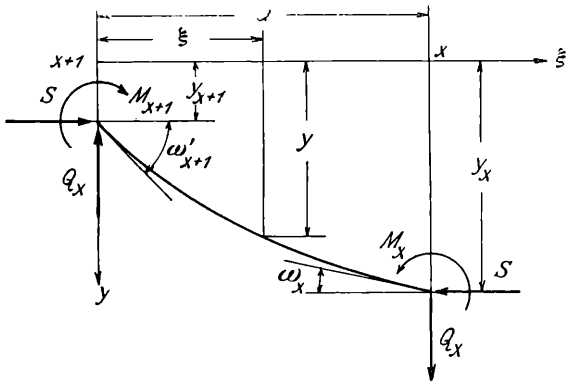

Fig. 3.

ursprünglichen Stabachse wirkenden Kräfte S, ferner die Knotenpunktsmomente M_x und M_{x+1} und schließlich die im Felde unveränderliche Querkraft Q_x, deren Zeiger mit dem rechten Endpunkt des Feldes übereinstimmen und in jenem Sinn positiv gerechnet werden soll, wie ihn die Fig. 3 angibt. Für einen beliebigen Punkt der Stabachse mit den Koordinaten ξ und y lautet das Biegungsmoment:

$$M_\xi = S(y - y_{x+1}) + Q_x \cdot \xi + M_{x+1}.$$

[1] Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1907, p. 235.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

In Verbindung mit der üblichen Näherung:

$$M = -EJy''$$

und den Hilfsgrößen:

$$\frac{S}{EJ} = \varkappa^2, \quad -\frac{Q_x}{S} = u, \; y_{x+1} - \frac{M_{x+1}}{S} = v \tag{1}$$

lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$y'' + \varkappa^2 y - \varkappa^2 (u\xi + v) = 0.$$

Ihre Lösung ist:

$$y = A \sin \varkappa\xi + B \cos \varkappa\xi + u\xi + v. \tag{2}$$

Die Integrationsfestwerte ergeben sich aus den beiden Randbedingungen:

$$\xi = 0, \; y = y_{x+1} \text{ und } \xi = a, \; y = y_x$$

zu:

$$B = y_{x+1} - v$$

und:

$$A = \frac{1}{\sin a\varkappa} [-a u + y_x - v - (y_{x+1} - v) \cos a\varkappa].$$

Das Gleichgewicht gegen Verdrehen liefert (siehe Fig. 3):

$$Q_x = \frac{S}{a} [y_{x+1} - y_x - \frac{1}{S}(M_{x+1} - M_x)] \tag{3}$$

Mit Benützung von (1) und (3) und der abkürzenden Bezeichnung:

$$\varphi = a\varkappa = a\sqrt{\frac{S}{EJ}} \tag{4}$$

gewinnen wir für A und B die Ausdrücke:

$$A = \frac{1}{S}\left[\frac{M_x}{\sin \varphi} - \frac{M_{x+1}}{\operatorname{tg} \varphi}\right], \; B = \frac{M_{x+1}}{S} \tag{5}$$

Wir benötigen zunächst die Neigungswinkel der Stabachse in den Endpunkten. Durch Differentiation wird aus (2) erhalten:

$$y' = A\varkappa \cos \varkappa\xi - B\varkappa \sin \varkappa\xi + u.$$

Mit der Bezeichnungsweise der Fig. 3 wird dann:

$$\begin{aligned} \text{für } \xi = o. \quad & \operatorname{tg} \omega'_{x+1} = A\varkappa + u \\ \xi = a. \quad & \operatorname{tg} \omega \quad = A\varkappa \cos \varkappa a - B\varkappa \sin \varkappa a + u. \end{aligned}$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Einführung von (1), (4) und (5) in diese Ausdrücke ergibt die Neigungswinkel in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\omega'_{x+1} &= \left(1-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\frac{M_{x+1}}{aS}-\left(1-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\frac{M_x}{aS}- \\ &\qquad -\frac{1}{a}\left(y_{x+1}-y'_x\right) \\ \operatorname{tg}\omega_x &= \left(1-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\frac{M_{x+1}}{aS}-\left(1-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\frac{M_x}{aS}- \\ &\qquad -\frac{1}{a}\left(y'_{x+1}-y'_x\right) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Für jeden Knotenpunkt können wir für die Stabneigung zwei Werte angeben, die sich z. B. für den Knoten x aus den links und rechts davon liegenden Feldern $x+1$. .x und $x\ldots x-1$ entsprechend der gewählten Bezeichnung mit ω_x und ω'_x ergeben. Das Bildungsgesetz der Neigungswinkel ist aus (6) zu ersehen und wir können unmittelbar anschreiben:

$$\operatorname{tg}\omega'_x=\left(1-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\frac{M_x}{aS}-\left(1-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\frac{M_{x-1}}{aS}- -\frac{1}{a}\left(y_x-y'_{x-1}\right) \quad (6\,a)$$

Da die beiden Stabachsen am Zusammenschluß zweier Felder stetig ineinander übergehen müssen, ist es notwendig, daß in jedem Knotenpunkte die beiden vorerwähnten Winkel einander gleich sind, so daß wir für x erhalten:

$$\omega_x=\omega'_x,$$

welche Beziehung unter Verwendung von (6) und (6 *a*) und den Hilfsgrößen:

$$s=\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\varphi-\sin\varphi},\quad t=\frac{S\sin\varphi}{\varphi-\sin\varphi}$$

die Form erhält:

$$M_{x+1}+2\,s\,M_x+M_{x-1}+t\,(y'_{x+1}-2y'_x+y'_{x-1})=0, \quad (I)$$

die wir gemäß ihrer Herleitung als Stetigkeitsbedingung bezeichnen.

b) Die Stützengleichungen.

In der Gleichung I haben wir erst eine Verbindung zwischen den Unbekannten M_x und y_x kennengelernt. Eine zweite Beziehung erhalten wir durch Betrachtung des Zusammenhanges

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zwischen den in einem Knotenpunkt auftretenden Stützenreaktionen und dem elastischen Verhalten der Stütze selbst. Schneiden wir im Punkt x ein Stück des Stabes unmittelbar links und rechts des Knotens heraus und bringen in den Schnittstellen die Querkräfte an, so ist die Stützenreaktion R_x gemäß Fig. 4, in welcher R_x als tätige Kraft auf den Stab wirkend eingezeichnet ist:

$$R_x = Q_{x-1} - Q_x \tag{7}$$

Die Einführung von (3) in diese Beziehung ergibt:

$$R_x = \frac{1}{a}\left[M_{x+1} - 2\,M_x + M_{x-1} - S\left(y'_{x+1} - 2y'_x + y_{x-1}\right)\right]. \tag{8}$$

Bezeichnet ferner δ den durch die Querträgerbelastung hervorgerufenen Anteil an der Knotenpunktsverschiebung (positiv nach

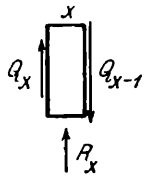

Fig. 4.

dem Brückeninnern) und W den bereits eingangs definierten Rahmenwiderstand, welche beiden Werte gemäß unserer Voraussetzung für alle Mittelknoten $(n-1)$ bis $-(n-1)$ unveränderlich sind, so läßt sich bei Bestehen des Proportionalitätsgesetzes die Knotenpunktsverschiebung in der Form

$$y'_x = \delta + \frac{R_x}{W} \tag{9}$$

schreiben, welcher Ausdruck unter Verwendung von (8) die Gleichung

$$-(M_{x+1} - 2\,M_x + M_{x-1}) + S(y'_{x+1} - 2y'_x + y_{x-1}) + aWy'_x = aW\delta \quad \text{II}$$

ergibt, die eine zweite Beziehung zwischen den Unbekannten M_x und y'_x vorstellt und die wir im Hinblick auf ihre Entstehung Stützengleichung nennen wollen.

Die Gleichungen I und II bilden ein Simultansystem zweier linearer Differenzengleichungen mit unveränderlichen Beiwerten. Jede von ihnen ist von zweiter Ordnung und wir können nach Einführung der zweiten Differenzen kürzer schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \triangle^2 M_x + 2(s-1)M_x + t\triangle^2 y'_x &= 0 \\ -\triangle^2 M_x + S\triangle^2 y'_x + aWy'_x &= aW\delta \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ehe wir an die Lösung des Systems (10) schreiten, mögen noch die Verhältnisse am Ende des Stabes untersucht werden.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

2. Die Randbedingungen.

Ein Gleichungspaar von der Form (10) kann für jeden Zwischenknoten $(n-1)$ bis $-(n-1)$ aufgestellt werden. Wie schon einleitend bemerkt wurde, legen wir der Betrachtung einen Träger nach Fig. 1 zugrunde. Infolge der vorhandenen Symmetrie können wir uns dabei auf eine Trägerhälfte beschränken. Zur Aufstellung von Stetigkeitsbedingung und Stützengleichung für den Knoten n gehen wir in derselben Weise wie unter $1\,a$ und $1\,b$ vor. Wir be-

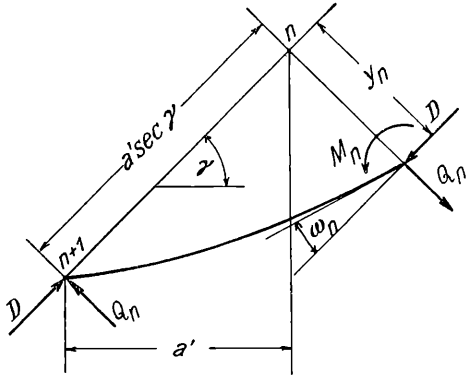

Fig.

trachten die Formänderung des Stabes $n+1$. n senkrecht zur Ebene der Tragwand (Fig. 5). Aus der zweiten Gleichung (6) erhalten wir unter Berücksichtigung der gelenkigen Festhaltung des Auflagerknotens $n+1$, welche ausgedrückt ist durch:

$$\mathfrak{M}_{n+1} = 0 \text{ und } y'_{n+1} = 0$$

und unter Verwendung der Bezeichnungen der Fig. 5

$$\operatorname{tg} \omega_n = -\left(1 - \frac{\varphi'}{\operatorname{tg} \varphi'}\right) \frac{\mathfrak{M}_n}{a' D \sec \gamma} + \frac{1}{a' \sec \gamma} y'_n .$$

Wir haben hier statt M_n. $\mathfrak{M}_n$ geschrieben, um anzudeuten, daß es sich um die Formänderungen in einer um den Winkel γ zur Wagrechten geneigten Ebene handelt. Ferner ist analog zu (4):

$$\varphi' = a' \sqrt{\frac{D}{E J'}} \sec \gamma \qquad (4\,a)$$

Aus $(6\,a)$ ergibt sich weiters:

$$\operatorname{tg} \omega'_n = \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}\right) \frac{M_n}{a S} - \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi}\right) \frac{M_{n-1}}{a S} - \frac{1}{a} \left(y'_n - y'_{n-1}\right).$$

Dem Kräftespiel im Knoten n legen wir die Darstellung zugrunde, wie sie Müller-Breslau und Zimmermann gegeben haben.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Das Moment $\mathfrak{M}_n$ wird in eine wagrechte Komponente $\mathfrak{M}_n \cos\gamma$ und in eine lotrechte $\mathfrak{M}_n \sin\gamma$ zerlegt. Sehen wir von einer Verdrehungssteifigkeit der Stütze n ab, so besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{M}_n \cos\gamma = M_n \tag{11}$$

Das lotrechte Moment $\mathfrak{M}_n \sin\gamma$ möge zur Gänze von der Stütze, d. i. also von dem Halbrahmen im Knoten n, aufgenommen werden. Bei dem gewählten Biegungssinn der Momente sucht dieses Teilmoment ebenso wie die Stützenreaktion R den Knoten nach innen zu verschieben.

Die Stetigkeitsbedingung läßt sich hier in der Form fassen, daß die Horizontalprojektion der elastischen Linie keine sprungweise Tangentenänderung aufweisen darf. Das erfordert die Gleichheit der Horizontalprojektionen von ω_n und ω'_n, d. i.

$$\operatorname{tg}\omega_n . \sec\gamma = \operatorname{tg}\omega'_n .$$

Nach Einsetzen der beiden Tangenten, Berücksichtigung von (11) und den kurzen Bezeichnungen:

$$\frac{1}{a\,S}\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right) = c(\varphi), \quad \frac{1}{a'\,D\cos\gamma}\left(1 - \frac{\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi'}\right) = c'(\varphi),$$

$$-\frac{1}{a\,S}\left(1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right) = d(\varphi)$$

gewinnt die Stetigkeitsbedingung für den Knoten n die Form:

$$\left[c(\varphi) + c'(\varphi)\right] M_n + d(\varphi)\, M_{n-1} - y'_n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + \frac{1}{a} y'_{n-1} = 0. \tag{I a}$$

Die Stützenreaktion im Knoten n ist nach (3) und (7) und mit Bezug auf Fig. 5:

$$R_n = \left[\frac{S}{a} + \frac{D}{a'}\cos\gamma\right] y'_n - \frac{S}{a} y'_{n-1} - \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right] M_n + \frac{1}{a} M_{n-1}.$$

Zu dieser Kraft tritt noch die bereits erwähnte lotrechte Momentenkomponente hinzu, deren Größe mit Beachtung von (11)

$$\mathfrak{M}_n \sin\gamma = M_n \operatorname{tg}\gamma$$

ist und die zu der Verschiebung des Knotens den Beitrag $\frac{M_n}{W_0}\operatorname{tg}\gamma$ leistet, wobei W_0 analog zu der Definition des Rahmenwiderstandes ein Moment bedeutet, das eine Verschiebung um die Längeneinheit zur Folge hat. Bezeichnen wir ferner mit δ_0 den von der Belastung

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

des Endquerträgers herrührenden Anteil an der Gesamtverschiebung, so ergibt Gleichung (9) nach Einführung der obigen Werte die Stützengleichung des Endknotens n:

$$\left(1 + \frac{a}{a'} - a\frac{W_0}{\overline{W}_0}\ \mathrm{tg}\,\gamma\right)M_n - M_{n-1} - \left(S + \frac{a}{a'}D\cos\gamma - aW_0\right)y_n + \\ + Sy_{n-1} = aW_0\delta_0 \qquad (\mathrm{II}\,a)$$

Die Gleichungen (I a) und (II a) und die ihnen entsprechenden des anderen Trägerendes, die aus den vorigen durch Vorzeichenwechsel der Zeiger von M und y zu gewinnen sind, bilden die Randbedingungen des Systems (10). Ihre allgemeine Behandlung in dieser Form führt zu recht unhandlichen Zusammenhängen und es möge daher für die weitere Untersuchung eine Vereinfachung Platz greifen, die in der Voraussetzung eines Kugelgelenkes im Knoten n besteht. Für diesen Fall ist (I a) durch die Beziehung $M_n = 0$ zu ersetzen und in (II a) fällt dadurch das erste Glied weg. Für den Knickzustand ist diese Annahme übrigens streng erfüllt, wenn, wie üblich, die freie Knicklänge der Endstrebe gleich der Netzlänge $a'\sec\gamma$ ist. Dann ist[1] $\varphi' = \pi$, damit wird $c'(\varphi) = \infty$ und aus (I a) entsteht $M_n = 0$. Bei der Ermittlung der Biegelinie hingegen bildet das Kugelgelenk eine je nach der konstruktiven Ausbildung des Knotens n mehr oder minder gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse.

Die Randbedingungen lauten nun: Für den Knoten n:

$$\left.\begin{aligned} &M_n = 0 \\ -\,&M_{n-1} - \left(S + \frac{a}{a'}D\cos\gamma - aW_0\right)y_n + Sy_{n-1} = aW_0\delta_0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

und für den Knoten $-n$:

$$\left.\begin{aligned} &M_{-n} = 0 \\ -\,&M_{-n+1} - \left(S + \frac{a}{a'}D\cos\gamma - aW_0\right)y_{-n} + Sy_{-n+1} = aW_0\delta_0 \end{aligned}\right\} \qquad (12\,a)$$

Für den Träger mit lotrechtem Abschluß ist $D = 0$ zu setzen.

3. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichungen.

Von den beiden Gleichungen (10) ist die erste homogen, die zweite nicht homogen. Man ersieht unmittelbar, daß eine Partikularlösung des vollständigen Systems die folgende ist:

$$M_x = 0,\ y_x = \delta \qquad (13)$$

[1] Siehe auch p. 88.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Lösung der homogenen Form (10) verwenden wir den Ansatz:

$$M_x = C\eta\, e^{\alpha x},\ y'_x = C\mu\, e^{\alpha x} \tag{14}$$

mit den zweiten Differenzen:

$$\triangle^2 M_x = C.2\,\eta\, e^{\alpha x}(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1),\ \triangle^2 y'_x = C.2\,\mu\, e^{\alpha x}(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1) \tag{15}$$

der die beiden charakteristischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\eta(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1) + (s+1)\,\eta + t\,\mu\,(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1) = 0 \\ &-2\,\eta(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1) + 2\,\mu\, S(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1) + aW\mu = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

liefert. Man erhält aus (16):

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{2(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1)}{2\,S(\mathfrak{Cof}\,\alpha - 1) + aW}. \tag{17}$$

und die Bestimmungsgleichung für α:

$$\mathfrak{Cof}^2\alpha - \frac{4t + 2\,S(1-s) - aW}{2(t+S)}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha + \frac{2t - 2\,Ss + aWs}{2(t+S)} = 0. \tag{18}$$

Ersetzen wir s und t durch ihre früheren Ausdrücke (siehe p. 5) und führen die Hilfsgrößen

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\varphi - \frac{aW}{2\,S\varphi}\left(\varphi - \sin\varphi\right)\right] \\ r &= \left(1 - \frac{aW}{2\,S}\right)\cos\varphi + \frac{aW}{2\,S\varphi}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ein, so gewinnen wir für die beiden Wurzeln der Gleichung (18) den Ausdruck:

$$\mathfrak{Cof}\,\alpha = k \pm \sqrt{k^2 - r}, \tag{20}$$

aus welchem im allgemeinen zwei verschiedene Werte, $\mathfrak{Cof}\,\alpha_1$ und $\mathfrak{Cof}\,\alpha_2$, entspringen. Da jeder Funktion $\mathfrak{Cof}\,\alpha$ ein positives und negatives Argument entspricht, sind vier verschiedene α vorhanden: $+\alpha_1$, $-\alpha_1$ und $+\alpha_2$, $-\alpha_2$, so daß wir vier verschiedene Teillösungen von der Form (14) erhalten. Das charakteristische Gleichungspaar (16) liefert ferner nur das Verhältnis von μ zu η; wir können daher eine dieser zwei Größen willkürlich annehmen und wählen für μ den Zähler des Bruches (17), dann wird η gleich dem Nenner desselben. Mit den beiden Wurzeln (20) ergibt sich somit:

$$\mu_{1,2} = 2(\mathfrak{Cof}\,\alpha_{1,2} - 1),\ \eta_{1,2} = 2\,S(\mathfrak{Cof}\,\alpha_{1,2} - 1) + aW \tag{21}$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die vollständige Lösung der inhomogenen Form (10) lautet jetzt:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= C_1\,\eta_{i1}\,e^{\alpha_1 x} + C_2\,\eta_{i1}\,e^{-\alpha_1 x} + C_3\,\eta_{i2}\,e^{\alpha_2 x} + C_4\,\eta_{i2}\,e^{-\alpha_2 x} \\ y'_x &= C_1\,\mu_1\,e^{\alpha_1 x} + C_2\,\mu_1\,e^{-\alpha_1 x} + C_3\,\mu_2\,e^{\alpha_2 x} + C_4\,\mu_2\,e^{-\alpha_2 x} + \delta \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die weitere Behandlung hängt davon ab, welcher Art die beiden Wurzeln (20) sind.

a) Gleichung (20) liefere zwei reelle Werte $\mathfrak{Cof}\,\alpha_1$ und $\mathfrak{Cof}\,\alpha_2$; dann sind auch $\eta_{i1,2}$ und $\mu_{1,2}$ reelle Zahlen. Mit Hilfe des Zusammenhanges zwischen Exponential- und Hyperbelfunktionen und Einführung neuer Festwerte, die mit den früheren in der Art:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &\cdot \quad C_1 & \qquad C_1 - C_2 &\cdot \quad C_2 \\ C_3 + C_4 &\cdot \quad C_3 & \qquad C_3 - C_4 &\cdot \quad C_4 \end{aligned}$$

in Verbindung stehen, läßt sich (22) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= C_1\,\eta_{i1}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 x + C_2\,\eta_{i1}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 x + C_3\,\eta_{i2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2 x + C_4\,\eta_{i2}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 x \\ y'_x &= C_1\,\mu_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 x + C_2\,\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 x + C_3\,\mu_2\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2 x + C_4\,\mu_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 x + \delta \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Für die Knotenpunktsverschiebungen y'_x kann man noch eine andere Form angeben, die besonders bei der Ermittlung der Integrationskonstanten sehr von Vorteil ist. Führt man die Beziehung:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{S}\,(\eta_{i1,2} - a\,W) \quad (21\,a)$$

in die letzte Gleichung ein, so erhält man:

$$y'_x = \frac{M_x}{S} - \\ - \frac{a\,W}{S}\,(C_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 x + C_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 x + C_3\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2 x + C_4\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 x) + \delta \quad (23\,a)$$

b) Gleichung (20) ergebe eine Doppelwurzel $\mathfrak{Cof}\,\alpha$, die bedingt ist durch das Verschwinden der Diskriminante $k^2 - r$. Dann besteht neben der Teillösung (14) auch noch die Sonderlösung:

$$M_x = e^{\alpha x}\,(x\eta + 2\,S\,\mathfrak{Sin}\,\alpha), \quad y'_x = e^{\alpha x}\,(x\mu + 2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha),$$

Weisen wir wie früher den symmetrischen Gliedern die Konstanten C_1 und C_3, den unsymmetrischen C_2 und C_4 zu und verwenden in dem Ausdruck für y'_x die Beziehung (21 *a*), so erscheinen jetzt die Unbekannten in der Form:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= C_1\,\eta_i\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x + C_2\,\eta_i\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x + C_3\,(x\eta\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x + \\ &\quad + 2\,S\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x) + C_4\,(x\eta_i\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x + 2\,S\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x) \\ y'_x &= \frac{Mx}{S} - \frac{a\,W}{S}\,(C_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x + C_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x + C_3\,x\,\mathfrak{Sin}\,\alpha x + \\ &\quad + C_4\,x\,\mathfrak{Cof}\,\alpha x) + \delta. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

c) Die beiden Wurzeln der Gleichung (20) seien konjugiert komplex. Die Bedingung hiefür ist:

$$k^2 - r < 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sqrt{r - k^2} = \rho, \tag{25}$$

dann ist:

$$\mathfrak{Cof}\, \alpha_{1,2} = k \pm i\rho \tag{26}$$

Wir behandeln zunächst die erste Wurzel $\mathfrak{Cof}\, \alpha_1 = k + i\rho$. Das Zurückgehen auf die Exponentialfunktion liefert für e^{α_1} eine reziproke quadratische Gleichung; es genügt daher die Betrachtung nur einer Wurzel derselben:

$$e^{\alpha_1} = k + i\rho + \sqrt{(k+i\rho)^2 - 1}. \tag{27}$$

Bringen wir mit:

$$m^2 = (k^2 - \rho^2 - 1)^2 + 4k^2\rho^2, \quad \cos\psi = \frac{k^2 - \rho^2 - 1}{m}, \quad \sin\psi = \frac{2k\rho}{m}$$

den komplexen Radikand in die trigonometrische Form, so ist:

$$\sqrt{(k+i\rho)^2 - 1} = \sqrt{m} \cdot \left(\cos\frac{\psi}{2} + i \sin\frac{\psi}{2}\right).$$

α_1 ist ebenfalls eine komplexe Zahl. Setzen wir hiefür: $\alpha_1 = \mathfrak{a}_1 + i\beta_1$, so gewinnen wir aus (27) die Beziehung:

$$e^{\mathfrak{a}_1} \cos\beta_1 + i e^{\mathfrak{a}_1} \sin\beta_1 = k + \sqrt{m} \cdot \cos\frac{\psi}{2} + i\left(\rho + \sqrt{m} \cdot \sin\frac{\psi}{2}\right), \tag{27a}$$

aus welcher unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} e^{\mathfrak{a}_1} \cos\beta_1 &= k + \sqrt{m} \cdot \cos\frac{\psi}{2} \\ e^{\mathfrak{a}_1} \sin\beta_1 &= \rho + \sqrt{m} \cdot \sin\frac{\psi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} e^{2\mathfrak{a}_1} &= \left(k + \sqrt{m} \cdot \cos\frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\rho + \sqrt{m}\ \sin\frac{\psi}{2}\right)^2 \\ \operatorname{tg}\beta_1 &= \frac{\rho + \sqrt{m} \cdot \sin\frac{\psi}{2}}{k + \sqrt{m} \cdot \cos\frac{\psi}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

folgen.

©Akademie d

Die zweite Wurzel der Gleichung (26): $\mathfrak{Cof}\,\alpha_2 = k - i\rho$ liefert in analoger Weise mit dem Ansatze $\alpha_2 = \mathfrak{a}_2 + i\beta_2$ zunächst:

$$e^{\mathfrak{a}_2}\cos\beta_2 + i e^{\mathfrak{a}_2}\sin\beta_2 = k + \sqrt{m}\,.\cos\frac{\psi}{2} - i\left(\rho + \sqrt{m}\sin\frac{\psi}{2}\right) \quad (27b)$$

Es ist daher:

$$\left.\begin{aligned} e^{\mathfrak{a}_2}\cos\beta_2 &= k + \sqrt{m}\,.\cos\frac{\psi}{2} \\ e^{\mathfrak{a}_2}\sin\beta_2 &= -\left(\rho + \sqrt{m}\,.\sin\frac{\psi}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \quad (28a)$$

Daraus ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} e^{2\mathfrak{a}_2} &= \left(k + \sqrt{m}\,.\cos\frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\rho + \sqrt{m}\,\sin\frac{\psi}{2}\right)^2 \\ \operatorname{tg}\beta_2 &= -\frac{\rho + \sqrt{m}\sin\frac{\psi}{2}}{k + \sqrt{m}\cos\frac{\psi}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (29a)$$

Wir erhalten demnach für $e^{2\mathfrak{a}_2}$ denselben Ausdruck wie für $e^{2\mathfrak{a}_1}$, mithin ist $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. Mit Berücksichtigung dieser Beziehung liefert ferner ein Vergleich der Gleichungen (28) und (28a): $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$ und $\sin\beta_1 = -\sin\beta_2$, woraus in Übereinstimmung mit den zweiten Gleichungen (29) und (29a) $\beta_2 = -\beta_1$ folgt. Es können daher weiterhin die Zeiger 1 und 2 weggelassen und die vier Werte α in übersichtlicher Weise angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathfrak{a} + i\beta & \alpha_2 &= \mathfrak{a} - i\beta \\ -\alpha_1 &= -\mathfrak{a} - i\beta & -\alpha_2 &= -\mathfrak{a} + i\beta \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$\mathfrak{a}$ und β sind durch die Bestimmungsgleichungen (29) oder (29a) gegeben, die sich nach mehrfachen Umformungen schließlich in der einfachen Form darstellen lassen:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{a} &= \sqrt{(k+1)^2+\rho^2} + \sqrt{(k-1)^2+\rho^2} \\ 2\cos\beta &= \sqrt{(k+1)^2+\rho^2} - \sqrt{(k-1)^2+\rho^2} \end{aligned}\right\} \quad (30a)$$

Die Einführung von (30) in die allgemeinen Ausdrücke (22) ergibt bei Verwendung der Hyperbelfunktionen unter Beachtung des Umstandes, daß jetzt auch die Werte η und μ komplex sind (für die man mit (26) unter Zuziehung der Hilfsgrößen

$$p = 2\,S(k-1) + aW, \quad q = 2\,\rho\,S \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{1,2} = p \pm iq \quad \text{und} \\ &\mu_{1,2} = 2\,(k-1) \pm i\,.\,2\,\rho = \frac{1}{S}\,(p - aW \pm iq) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schreiben kann) und nach der Konstantenänderung:

$$C_1+C_2+C_3+C_4 \ldots C_1, \quad C_1-C_2+C_3-C_4 \ldots C_2$$
$$i(C_1+C_2-C_3-C_4) \ldots C_3, \quad i(C_1-C_2-C_3+C_4) \ldots C_4$$

die Unbekannten in der Form:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= C_1 (p \operatorname{Cof} \alpha x \cos \beta x - q \operatorname{Sin} \alpha x \sin \beta x) + \\ &\quad + C_2 (p \operatorname{Sin} \alpha x \cos \beta x - q \operatorname{Cof} \alpha x \sin \beta x) + \\ &\quad + C_3 (q \operatorname{Cof} \alpha x \cos \beta x + p \operatorname{Sin} \alpha x \sin \beta x) + \\ &\quad + C_4 (q \operatorname{Sin} \alpha x \cos \beta x + p \operatorname{Cof} \alpha x \sin \beta x) \\ y_x &= \frac{M_x}{S} - \frac{aW}{S} (C_1 \operatorname{Cof} \alpha x \cos \beta x + C_2 \operatorname{Sin} \alpha x \cos \beta x + \\ &\quad + C_3 \operatorname{Sin} \alpha x \sin \beta x + C_4 \operatorname{Cof} \alpha x \sin \beta x) + \delta \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

4. Die Ermittlung der Konstanten und der Biegelinie des Gurtes.

Mit den im vorigen Abschnitt entwickelten Beziehungen (23), (24) und (33) sind für die drei möglichen Wurzelformen der Gleichung (20) die Unbekannten M_x und y_x bis auf die Integrationskonstanten C_1 bis C_4 bestimmt. Zur Ermittlung der letzteren stehen uns die Randbedingungen (12) und (12a) zur Verfügung. Wir beschränken uns hiebei auf die Behandlung des Falles komplexer Wurzeln, da, wie später gezeigt werden wird, nur dieser Fall praktisch in Frage kommt. Die Anwendung des eben erhaltenen Ausdruckes für M_x (Gleichung 33) auf die beiden Bedingungen $M_n = 0$ und $M_{-n} = 0$ liefert nach Addition und Subtraktion zunächst die beiden Gleichungen:

$$C_1 (p \operatorname{Cof} \alpha n \cos \beta n - q \operatorname{Sin} \alpha n \sin \beta n) + C_3 (q \operatorname{Cof} \alpha n \cos \beta n + p \operatorname{Sin} \alpha n \sin \beta n) = 0 \quad (34)$$

$$C_2 (p \operatorname{Sin} \alpha n \cos \beta n - q \operatorname{Cof} \alpha n \sin \beta n) + C_4 (q \operatorname{Sin} \alpha n \cos \beta n + p \operatorname{Cof} \alpha n \sin \beta n) = 0. \quad (34a)$$

Bezeichnen wir ferner in der Formel für y_x den von x abhängigen Klammerausdruck vorübergehend mit $f(x)$, so gilt:

$$y_n = -\frac{aW}{S} f(n) + \delta$$

$$y_{n-1} = \frac{M_{n-1}}{S} - \frac{aW}{S} f(n-1) + \delta.$$

Nach Einführung dieser Werte in die zweite Gleichung (12) nimmt diese die Form an:

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{a}{a'} D \cos\gamma + S - a W_0\right) f(n) - S f(n-1) =$$

$$= S \frac{W_0}{W} (\delta_0 - \delta) + \frac{SD}{a' W} \delta \cos\gamma.$$

Eine analoge Umformung wird auch mit der zweiten Gleichung (12a) vorgenommen. Macht man die Substitution f wieder rückgängig, so erhält man schließlich wie früher nach Addition und Subtraktion dieser beiden Randbedingungen die folgenden Beziehungen:

$$C_1 \left[\left(\frac{a}{a'} D \cos\gamma + S - a W_0\right) \mathfrak{Cof}\, \alpha n \cos \beta n - \right.$$

$$\left. - S \mathfrak{Cof}\, \alpha (n-1) \cos \beta (n-1)\right] +$$

$$+ C_3 \left[\left(\frac{a}{a'} D \cos\gamma + S - a W_0\right) \mathfrak{Sin}\, \alpha n \sin \beta n - \right.$$

$$\left. - S \mathfrak{Sin}\, \alpha (n-1) \sin \beta (n-1)\right] =$$

$$= S \frac{W_0}{W} (\delta_0 - \delta) + \frac{SD}{a' W} \delta \cos\gamma \qquad (35)$$

$$C_2 \left[\left(\frac{a}{a'} D \cos\gamma + S - a W_0\right) \mathfrak{Sin}\, \alpha n \cos \beta n - S \mathfrak{Sin}\, \alpha (n-1) \cos \beta (n-1)\right] +$$

$$+ C_4 \left[\left(\frac{a}{a'} D \cos\gamma + S - a W_0\right) \mathfrak{Cof}\, \alpha n \sin \beta n - \right.$$

$$\left. - S \mathfrak{Cof}\, \alpha (n-1) \sin \beta (n-1)\right] = 0. \qquad (35a)$$

Die Gleichungen (34) und (35) ergeben die Konstanten C_1 und C_3, die Gleichungen (34a) und (35a) C_2 und C_4. Nimmt man an, daß die beiden Nennerdeterminanten von Null verschieden sind, so resultieren nur für C_1 und C_3 endliche Werte, während C_2 und C_4 verschwinden, da die zugehörigen Bestimmungsgleichungen homogen sind. Die Verformung ist also, wie man aus der allgemeinen Lösung (33) ersieht, zur Brückenmitte symmetrisch, was infolge der gemachten Annahmen von vornherein hätte berücksichtigt werden können; da wir uns aber später mit dem Knickfall beschäftigen wollen, durften wir in den allgemeinen Entwicklungen keine diesbezügliche Vereinfachung eintreten lassen. Wir erhalten nach kurzer Zwischenrechnung mit der naheliegenden Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} N = 2\rho \left(a W_0 - S - \frac{a}{a'} D \cos\gamma\right) &(\mathfrak{Cof}\, 2\alpha n + \cos 2\beta n) + \\ &+ p\,[\mathfrak{Sin}\, \alpha (2n-1) \sin\beta + \mathfrak{Sin}\, \alpha \sin\beta (2n-1)] + \\ &+ q\,[\mathfrak{Cof}\, \alpha (2n-1) \cos\beta + \mathfrak{Cof}\, \alpha \cos\beta (2n-1)]; \end{aligned}\right|$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{2}{W}\left[W_0(\delta_0-\delta)+\frac{\delta}{a'}D\cos\gamma\right](p\,\mathfrak{Sin}\,\alpha n\sin\beta n+ \\ &\qquad +q\,\mathfrak{Cof}\,\alpha n\cos\beta n); \\ Z_3 &= \frac{2}{W}\left[W_0(\delta_0-\delta)+\frac{\delta}{a'}D\cos\gamma\right](p\,\mathfrak{Cof}\,\alpha n\cos\beta n- \\ &\qquad -q\,\mathfrak{Sin}\,\alpha n\sin\beta n); \\ C_1 &= \frac{Z_1}{N}\qquad C_3=\frac{Z_3}{N}. \end{aligned}\right\}\quad(36)$$

Die Einführung der Konstanten in die allgemeinen Gleichungen (33) ergibt schließlich nach einiger Umformung die endgültigen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{N}\frac{1}{W}\left[W_0(\delta-\delta_0)-\frac{\delta}{a'}D\cos\gamma\right](p^2+q^2)\cdot F_1(x) \\ y_x &= \frac{M_x}{S}\left(1-aW\frac{p}{p^2+q^2}\right)-\frac{a}{NS}q\left[W_0(\delta-\delta_0)-\right. \\ &\qquad \left.-\frac{\delta}{a'}D\cos\gamma\right]F_2(x)+\delta \end{aligned}\right\}\quad(37)$$

worin zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} F_1(x) &= \mathfrak{Sin}\,\alpha(n+x)\sin\beta(n-x)+\mathfrak{Sin}\,\alpha(n-x)\sin\beta(n+x) \\ F_2(x) &= \mathfrak{Cof}\,\alpha(n+x)\cos\beta(n-x)+\mathfrak{Cof}\,\alpha(n-x)\cos\beta(n+x) \end{aligned}\right\}\quad(37a)$$

gesetzt wurde.

Sind die Knotenpunktsmomente und Knotenpunktsverschiebungen bekannt, so ist nach den im 1. Abschnitt gegebenen Beziehungen auch der Verlauf der Biegelinie innerhalb zweier Knoten bestimmt.

Aus (5) erhalten wir die Integrationsfestwerte A und B, aus (3) die Querkräfte und aus (1) die Hilfsgrößen u und v. Durch (2) ist dann für jedes Feld die Biegelinie festgelegt, die wir mit der Umformung $\varkappa\xi=\frac{\varphi}{a}\xi$ in der Form

$$y_\xi = A\sin\frac{\varphi}{a}\xi+B\cos\frac{\varphi}{a}\xi+u\xi+v$$

schreiben wollen. Nach zweimaliger Differentiation erhalten wir daraus den Momentenverlauf zu

$$M_\xi = S\left(A\sin\frac{\varphi}{a}\xi+B\cos\frac{\varphi}{a}\xi\right).$$

Schließlich ergibt Gleichung (7) die wagrechten Kräfte R_x, zu deren Nachprüfung auch Gleichung (9) herangezogen werden kann.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

5. Die Knickbedingung.

Mit verschwindenden Lastgliedern geht das bisher behandelte Problem der Biegung in jenes der Knickung über. Die Differenzengleichungen und ihre Randbedingungen werden homogen; endliche von Null verschiedene Lösungen, also von der Geraden abweichende, instabile Gleichgewichtslagen des Stabes sind nur dann möglich, wenn eine der beiden zu den obigen Bestimmungsgleichungen der Konstanten gehörige Nennerdeterminante verschwindet. Bezeichnen wir diese mit N (zugehörig zu C_1 und C_3), beziehungsweise N' (zugehörig zu C_2 und C_4), so erhalten wir in der Bedingung $N = 0$ oder $N' = 0$ einen Zusammenhang zwischen Stabdimensionen und Belastungen, aus welchem eine von diesen Größen berechnet werden kann. Wie man schon aus der Form von N (erste Gleichung 36) erkennt, ist diese einzig in Betracht kommende Größe der Endrahmenwiderstand W_0. Das gleiche gilt für die Determinante N' Aus beiden läßt sich W_0 in der gemeinsamen Form:

$$W_{01,2} = \frac{D}{a'}\cos\gamma + \frac{S}{a} - \frac{1}{2\,a\,\rho\,(\mathfrak{Cof}\,2\,\mathfrak{a}\,n \pm \cos 2\,\beta n)}$$
$$\Big\{p\,[\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{a}\,(2\,n-1)\sin\beta \pm \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{a}\sin\beta\,(2\,n-1)] +$$
$$+\,q\,[\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{a}\,(2\,n-1)\cos\beta \pm \mathfrak{Cof}\,\mathfrak{a}\cos\beta\,(2\,n-1)]\Big\}, \qquad (38)$$

in welcher jetzt unter S und D die bei Erreichung der Stabilitätsgrenze auftretenden Knicklasten vorstellen, fassen. Hiebei gehört das obere (+) Zeichen zu N, das untere (—) zu N'. Weiters erkennt man aus der allgemeinen Form (33), daß die Konstanten C_1 und C_3 mit geraden, C_2 und C_4 mit ungeraden Funktionen verbunden sind. Daraus folgt der Schluß, daß die Bedingung $N = 0$ zur lotrechten Stabhalbierenden symmetrische Gleichgewichtslagen kennzeichnet, während der Bedingung $N' = 0$ solche mit Polarsymmetrie bezüglich der Stabmitte ($x = 0$) entsprechen. Die daraus resultierenden W_0 mögen durch die Zeiger 1 und 2 unterschieden werden. Von den durch die Gleichung (38) definierten möglichen Gleichgewichtslagen interessiert praktisch nur jene, welcher bei gegebenen Stababmessungen die kleinste Knicklast oder umgekehrt bei gegebener Knicklast die größten Werte von Gurtprofil und Querstützung zugeordnet sind. Der verwickelte Zusammenhang zwischen Last und Stabgrößen, wie er durch Gleichung (38) dargestellt ist, gibt jedoch weder einen Überblick über die Anzahl der möglichen Gleichgewichtslagen noch ließe sich aus dieser Beziehung etwa die Knicklast S oder der Mittelrahmenwiderstand W ermitteln. Unbeschadet der Allgemeinheit, können diese Verhältnisse besser an einem Sonderfall übersehen werden. Wir wählen zu diesem Zwecke einen vierfeldrigen Träger mit lotrechtem Abschluß, setzen also $D = 0$ und $n = 2$. Die beiden Werte W_{01} und W_{02} lassen sich dann auch ohne Verwendung der bisher reichlich gebrauchten Hilfsgrößen noch in erträglicher Form

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

unmittelbar durch die in Betracht kommenden Werte S und W ausdrücken. Man erhält mit der Abkürzung:

$$\nu = \frac{aW}{2\,S\varphi}$$

$$W_{01} = \frac{2\,S}{a}\varphi\nu \frac{-\frac{3}{2}\cos 2\varphi + \nu\left|\varphi\cos 2\varphi + \cos 2\varphi + 2\nu[\sin 2\varphi - 2\varphi\cos 2\varphi] + 2\nu^2[\varphi^2\cos 2\varphi - 2\varphi\sin 2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\sin\varphi] + 2\sin\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right|}{}$$

und

$$W_{02} = \frac{S}{2\,a}\,\frac{\nu\sin\varphi + (1-2\nu\varphi)\cos\varphi}{\nu\sin\varphi + (1-\nu\varphi)\cos\varphi}.$$

An dieser Stelle möge eine Bemerkung über die Bedeutung der Größe φ Platz finden. Nach (4) ist φ definiert durch

$$\varphi = a\sqrt{\frac{S}{EJ}}$$

Für den Knickzustand kann das obige konstante Dehnmaß E durch den »resultierenden Modul« E' nach Engesser-Kármán ersetzt werden. Ferner läßt sich die Knicklast S in der verallgemeinerten Fassung der Eulerformel in der Form:

$$S = \frac{\pi^2 E'J}{(\nu a)^2}$$

schreiben, worin νa die freie Knicklänge des Stabes, die Zahl ν somit das Verhältnis zwischen dieser zu der Feldweite vorstellt. Die Verbindung beider Ausdrücke liefert die sehr einfache Beziehung:[1]

$$\varphi = \frac{\pi}{\nu} \tag{39}$$

die gleicherweise für den elastischen und unelastischen Bereich gilt. Da ein Druckgurt mindestens für die einfache Feldlänge knicksicher sein muß und man anderseits mit der freien Knicklänge kaum über die dreifache Knotenweite hinausgehen wird, so bewegt sich ν in den Grenzen zwischen 1 und 3 und ist mit Hilfe der Tafeln der Knickzahlen rasch zn ermitteln.

Wir wählen für unser Beispiel $\nu = 1{\cdot}5$, $a = 500$ *cm*, ferner, bei vierfacher Sicherheit, $S = 4.225 = 900$ ton, und erhalten dann:

$$W_{01} = W\frac{3\;670 + 1{\cdot}287\;W}{-2{\cdot}446 + 1{\cdot}594\;W + W^2}, \quad W_{02} = \frac{1{\cdot}393\;W - 1{\cdot}774}{W - 1{\cdot}971}$$

[1] Schweda, »Der Bauingenieur«, 1925, p. 514.

In der Fig. 6 ist der durch die obigen Formeln zum Ausdruck gebrachte Zusammenhang zwischen W und W_0 dargestellt. Aus der Figur ist zunächst folgendes zu entnehmen: Dem Endrahmenwiderstand ist offenbar eine untere Grenze gesetzt, die der Annahme unnachgiebiger Mittelrahmen ($W = \infty$) entspricht und graphisch durch die beiden horizontalen Asymptoten zum Ausdruck kommt. Von den auf diese Weise erhaltenen zwei Werten ist selbstverständlich der größere, d. i. hier $W = 1 \cdot 393$, maßgebend.

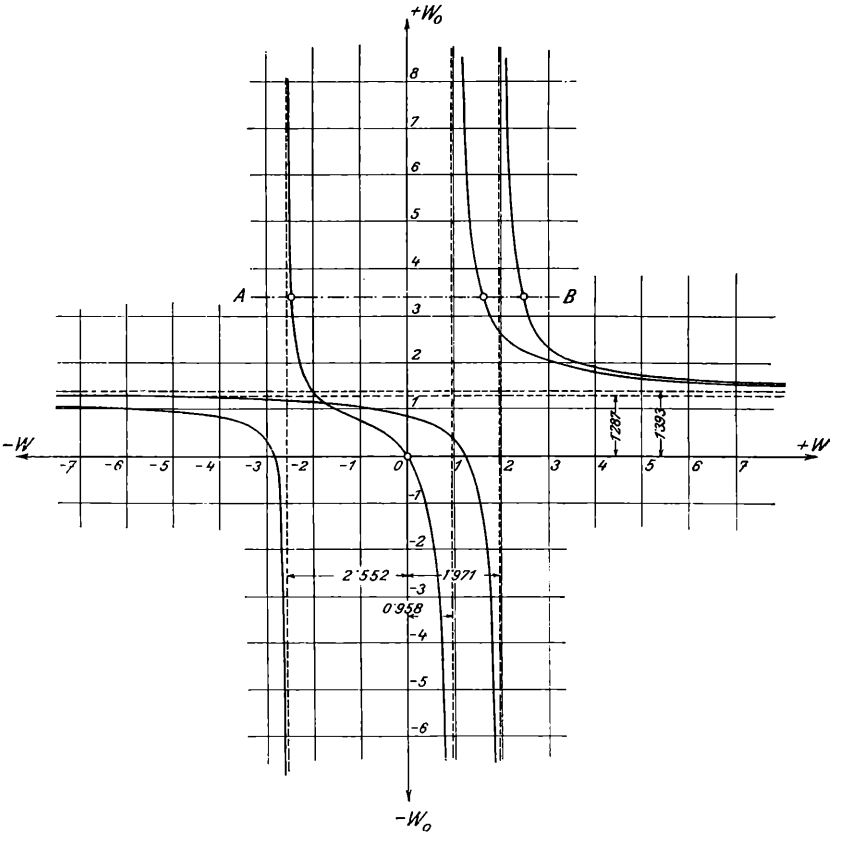

Fig. 6.

Jede darüberliegende zur W-Achse parallele Gerade, z. B. A—B, schneidet die Kurvenscharen dreimal, d. h. einem vorgegebenen W_0 entsprechen drei verschiedene W oder bei gegebenem Endrahmenwiderstand bestehen drei verschiedene Gleichgewichtslagen des ausgebogenen Stabes. Allgemein würden bei $2n$ Feldern $2n$—1 verschiedene Gleichgewichtsformen entspringen und dieses Ergebnis läßt sich auch aus der Form der Differenzengleichungen (10) ersehen. Der Wert W kommt hierin nur in den Stützengleichungen für die Mittelrahmen vor, deren Anzahl $2n$—1 ist. Die gleich Null

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gesetzte Nennerdeterminante des durch die obigen Differenzengleichungen und deren Randbedingungen verkörperten Gleichungssystems ergibt daher eine Gleichung vom Grade $2n-1$ in W, welcher ebenso viele Wurzeln entsprechen. Von den auf diese Weise erhaltenen drei (allgemein $2n-1$) Schnittpunkten ist augenscheinlich nur jener brauchbar, der bei gegebener Stabkraft dem größten Wert von W entspricht. Der Bereich dieser brauchbaren Lösungen ist nun durch die am weitesten in der positiven W-Richtung stehende vertikale Asymptote begrenzt. Die vertikalen Asymptoten bedeuten aber nichts anderes als die bei unnachgiebigen Endstützen ($W_0 = \infty$) notwendigen Zwischenrahmenwiderstände. Wir sind somit zu dem nicht überraschenden Ergebnis gelangt, daß die Größe des Mittelrahmens nicht beliebig ist, sondern jenen größten Betrag, der sich bei Annahme gelenkiger Festhaltung der Stabenden ergibt, nicht unterschreiten darf.

Die Knickbedingung für diesen Fall lautet (siehe Gleichung 38):

$$\mathfrak{Cof}\, 2\,\alpha n \pm \cos 2\,\beta n = 0.$$

Mit Benützung von (30) entsteht daraus:

$$\mathfrak{Cof}\, n\alpha_1\, \mathfrak{Cof}\, n\alpha_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\, n\alpha_1\, \mathfrak{Sin}\, n\alpha_2 = 0.$$

Die beiden Teilbedingungen $\mathfrak{Sin}\, n\alpha_1 = 0$ und $\mathfrak{Cof}\, n\alpha_1 = 0$ erfordern:

$$\alpha_1 = i\,\frac{\pi}{2n}\,z, \quad (z = 0, 1, 2 \ldots).$$

Nun ist nach (20):

$$\mathfrak{Cof}\, \alpha_1 = k + i\sqrt{r - k^2} = \cos\frac{\pi}{2n}\,z, \quad (z = 0, 1, 2 \ldots 2n-1),$$

aus welcher Beziehung nach Einführung von (19)

$$W = \frac{2S}{a}\,\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2n}\,z - 1\right)\left(\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{2n}\,z\right)}{\cos\frac{\pi}{2n}\,z - \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\,z - 1\right)},$$

$$(z = 0, 1, 2 \ldots 2n-1) \qquad (40)$$

folgt. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt Bleich,[1] wobei bemerken sei, daß wir die gesamte Felderzahl mit $2n$ bezeichnet haben, während sie bei Bleich n ist. Die beiden anderen Teilbedingungen $\mathfrak{Sin}\, n\alpha_2 = 0$ und $\mathfrak{Cof}\, n\alpha_2 = 0$ geben das gleiche Resultat. Von den $2n-1$ möglichen Lösungen ($z = 0$ ist bedeutungslos) ist diejenige herauszufinden, die den größten Wert von W

[1] Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, p. 201, Gl. *j*.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ergibt. Es ist das Verdienst Bleichs, diesen Größtwert in eine sehr handliche Formel gebracht zu haben. Sie gilt für $2n = \infty$ und führt dadurch zu Mittelrahmenwiderständen, die immer größer sind als diejenigen, die sich für endliche Felderzahlen ergeben. Doch ist der Unterschied schon bei $2n = 6$ bedeutunglos.

Es würde weiter keiner besonderen Schwierigkeit unterliegen, wenn wir fernerhin als Grenze des Mittelrahmenwiderstandes die Bleich'sche Formel verwenden würden. Im Interesse größerer Vereinfachung aber kann sie auch durch die Engesserformel ersetzt werden, da diese fast zur Gänze mit jener übereinstimmt, wenn man sich auf Knicklängen beschränkt, die größer sind als die 1, 2-fache Feldweite. Diese Beschränkung wird sich praktisch wohl stets als nützlich erweisen, um nicht allzu schwere Querrahmen zu erhalten.[1] Es ist ja schließlich auch nicht notwendig, den genauen Wert des Mittelrahmenwiderstandes bei festgehaltenen Enden zu kennen, denn dieser ist unbrauchbar, weil dann eben $W_0 = \infty$ sein müßte. Wir benötigen nur die Gewißheit, daß wir uns über diesem Wert, d. h. rechts der maßgebenden Asymptote (siehe Fig. 6), befinden. Dazu genügt aber die mit einem willkürlichen Faktor $c > 1$ versehene Engesserformel vollkommen. Diese lautet bekanntlich

$$W_E = \frac{a\,S^2}{4\,E'\,J}$$

und wir erhalten somit, bei Verwendung der Zahl ν, für den Wert des Mittelrahmenwiderstandes die wichtige Beziehung:

$$W = c\,W_E = c\,\frac{\pi^2 S}{4\,a\,\nu^2} \tag{41}$$

Ihre Einführung in (19) liefert für k und r geänderte Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\frac{\pi}{\nu} - c\,\frac{\pi}{8\,\nu}\left(\frac{\pi}{\nu} - \sin\frac{\pi}{\nu}\right)\right] \\ r &= \left(1 - c\,\frac{\pi^2}{8\,\nu^2}\right)\cos\frac{\pi}{\nu} + c\,\frac{\pi}{8\,\nu}\sin\frac{\pi}{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Die Zuziehung von (41) läßt schließlich das Ergebnis (38) mit der Hilfsgröße

$$m = 2\,(k-1) + c\,\frac{\pi^2}{4\,\nu^2} \tag{43}$$

in der endgültigen Form:

$$W_{01,2} = \frac{D}{a'}\cos\gamma + W.\varepsilon_{1,2} \tag{44}$$

erscheinen, wobei

---

[1] Hartmann, »Zeitschrift des Öster. Ing.- u. Arch.-Vereines«, 1925, H. 43/44.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{+\nu^2}{\pi^2 c}\left\{1 - \frac{1}{2\rho\,(\mathfrak{Cof}\,2\,\alpha n \pm \cos 2\beta n)}\left[m\left(\mathfrak{Sin}\,\alpha\,(2n-1)\sin\beta \pm \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \pm\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\beta\,(2n-1)\right) + 2\rho\left(\mathfrak{Cof}\,\alpha\,(2n-1)\cos\beta \pm \mathfrak{Cof}\,\alpha\cos\beta\,(2n-1)\right)\right]\right\} \quad (45)$$

das Verhältnis des End- zum Mittelrahmenwiderstand bei lotrechtem Trägerabschluß vorstellt, das nur abhängig ist von der Felderzahl $2n$, dem Schlankheitsverhältnis des Stabes, ausgedrückt durch die Zahl ν und dem willkürlichen Beiwert der Engesserformel c. Von den auf diese Weise erhaltenen zwei Werten $\varepsilon_{1,2}$ kommt nur der größere in Frage.

In den nachfolgenden Tabellen wurde für die am häufigsten auftretenden Felderzahlen $2n = 6, 8, 10$ und 12 dieses maßgebende Verhältnis für veränderliches ν und c ermittelt. ν bewegt sich, wie schon erwähnt wurde, in den Grenzen 1·2 bis 3·0; mit c unter

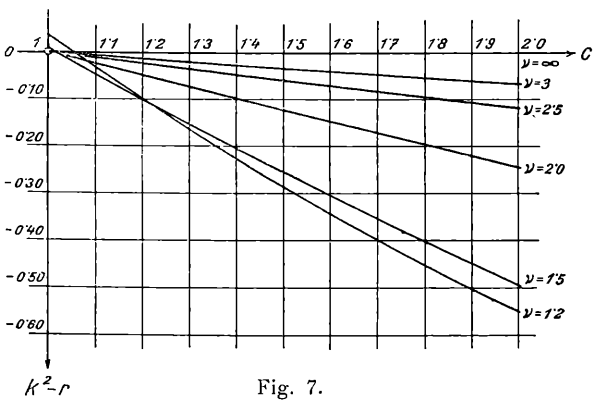

Fig. 7.

1·2 herabzugehen ist nicht empfehlenswert, da sich sonst unausführbare Endrahmenwiderstände ergeben, was man auch schon aus Fig. 6 ersieht, in welcher der brauchbare Kurvenast in der Nähe der kritischen Asymptote ein sehr rasches Ansteigen zeigt. Ferner wird man den Endrahmen immer stärker halten als den Mittelrahmen, mindestens jedoch beide gleich stark ausbilden, so daß ε nicht viel unter 1 sinken wird; dann ist es aber, wie man aus den Tafeln erkennt, nicht nötig, c größer als 2 zu wählen. Bei Vorhandensein einer schrägen Anlaufstrebe ist der nach den Tabellen ermittelte Wert W_0 entsprechend dem Ausdruck (44) noch um den Betrag $\frac{D}{a'}\cos\gamma$ (unter D die Knicklast verstanden) zu vermehren.

Mit Hilfe der Beziehungen (42) ist man nun in der Lage, festzustellen, welche Wurzelformen der Gleichung (20) auftreten können. In der Fig. 7 ist die Diskriminante $k^2 - r$ als Funktion von ν und c dargestellt. Man erkennt, daß für alle praktisch vor-

©Akademie d

kommenden Werte der letzteren die Diskriminante negativ bleibt, womit die bereits früher (p. 84) aufgestellte Behauptung bewiesen ist, daß nur die komplexen Lösungen von (20) von Belang sind. Dies gilt nicht nur für den Knickfall, sondern auch bei stabilen Gleichgewichts-

Werte von bei 6 Feldern ($n = 3$).

c	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1	1·8	1·9	2·0
1·2	1·00	0·78	0·65						
1·3	1·25	0·93	0·75						
1·4	1·41	1·04	0·84						
1·5	1·39	1·06	0·87						
1·6	1·35	1·10	0·94	0·82					
1·7	1·65	1·30	1·09	0·94					
1·8	2·01	1·54	1·25	1·06	0·94				
1·9	2·41	1·77	1·40	1·18	1·03	0·90			
2·0	2·79	1·97	1·55	1·29	1·11	0·97	0·85		
2·1	2·98	2·12	1·64	1·36	1·17	1·02	0·90		
2·2	2·93	2·10	1·66	1·38	1·19	1·04	0·94		
2·3	2·69	1·97	1·60	1·35	1·17	1·04	0·94	0·85	
2·4	2·27	1·76	1·48	1·27	1·12	1·00	0·91	0·83	
2·5	1·99	1·71	1·48	1·32	1·17	1·06	0·96	0·89	
2·6	2·27	1·92	1·66	1·46	1·30	1·17	1·06	0·97	0·89
2·7	2·57	2·17	1·84	1·61	1·43	1·28	1·16	1·06	0·97
2·8	2·91	2·44	2·05	1·79	1·58	1·41	1·27	1·15	1·06
2·9	3·29	2·72	2·28	1·97	1·73	1·54	1·38	1·26	1·15
3·0	3·72	3·02	2·52	2·17	1·90	1·68	1·50	1·36	1·24

Werte von ε bei 8 Feldern ($n = 4$).

ν \ c	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
1·2	0·93	0·74	0·62						
1·3	1·12	0·86	0·71						
1·4	1·27	0·96	0·80						
1·5	1·32	1·01	0·85						
1·6	1·42	1·12	0·94	0·81					
1·7	1·69	1·28	1·06	0·90					
1·8	1·96	1·44	1·17	0·99	0·87				
1·9	2·07	1·54	1·24	1·06	0·92				
2·0	2·04	1·54	1·26	1·08	0·95	0 85			
2·1	1·85	1·47	1·25	1·08	0·96	0·87			
2·2	2·08	1·66	1·39	1·20	1·05	0·94	0·85		
2·3	2·43	1·89	1·55	1·32	1·16	1·03	0·92		
2·4	2·83	2·13	1·73	1·46	1·26	1·11	1·00	0·90	
2·5	3·25	2·37	1·90	1·58	1·36	1·20	1·07	0·97	
2·6	3·69	2·61	2·07	1·70	1·46	1·28	1·13	1·02	0·93
2·7	4·03	2·82	2·20	1·81	1·54	1·34	1·19	1·07	0·97
2·8	4·22	2·96	2·28	1·86	1·59	1·39	1·23	1·11	1·01
2·9	4·25	3·01	2·30	1·89	1·62	1·41	1·25	1·13	1·03
3·0	3·98	2·85	2·25	1·87	1·61	1·41	1·26	1 14	1:04

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Werte von ε bei 10 Feldern ($n = 5$).

c	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
1·2	0·99	0·75	0·63						
1·3	1·06	0·83	0·70						
1·4	1·21	0·93	0·78						
1·5	1·26	1·00	0·84						
1·6	1·43	1·11	0·93	0·81					
1·7	1·64	1·24	1·03	0·88					
1·8	1·74	1·32	1·09	0·94	0·83				
1·9	1·72	1·34	1·13	0·98	0·87				
2·0	1·85	1·46	1·22	1·05	0·93	0·83			
2·1	2·14	1·63	1·34	1·14	1·00	0·89			
2·2	2·42	1·80	1·45	1·23	1·07	0·95	0·86		
2·3	2·66	1·92	1·55	1·31	1·14	1·01	0·91		
2·4	2·74	1·99	1·61	1·36	1·18	1·05	0·94	0·86	
2·5	2·65	2·00	1·63	1·39	1·21	1·08	0·97	0·89	
2·6	2·47	1·92	1·60	1·38	1·21	1·09	0·98	0·90	0·83
2·7	2·47	1·99	1·67	1·43	1·26	1·13	1·02	0·93	0·85
2·8	2·79	2·21	1·82	1·55	1·36	1·21	1·09	0·99	0·90
2·9	3·17	2·44	1·99	1·68	1·46	1·29	1·16	1·05	0·95
3·0	3·58	2·69	2·17	1·82	1·57	1·38	1·23	1·11	1·01

Werte von ε bei 12 Feldern ($n = 6$).

c	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
1·2	0·97	0·74	0·62						
1·3	1·06	0·82	0·69						
1·4	1·17	0·92	0·77						
1·5	1·25	0·99	0·84						
1·6	1·41	1·10	0·93	0·80					
1·7	1·54	1·19	1·00	0·87					
1·8	1·60	1·26	1·06	0·92	0·82				
1·9	1·73	1·35	1·12	0·98	0·87				
2·0	1·96	1·49	1·22	1·05	0·93	0·83			
2·1	2·12	1·60	1·30	1·12	0·99	0·88			
2·2	2·17	1·65	1·37	1·17	1·03	0·92	0·84		
2·3	2·12	1·66	1·40	1·20	1·06	0·95	0·87		
2·4	2·28	1·78	1·48	1·27	1·12	1·00	0·91	0·82	
2·5	2·57	1·94	1·60	1·36	1·19	1·06	0·96	0·87	
2·6	2·89	2·13	1·72	1·45	1·26	1·12	1·01	0·92	0·84
2·7	3·15	2·29	1·81	1·53	1·33	1·18	1·06	0·96	0·88
2·8	3·30	2·41	1·88	1·59	1·38	1·22	1·09	0·99	0·91
2·9	3·34	2·46	1·93	1·64	1·43	1·26	1·13	1·02	0·94
3·0	3·23	2·41	1·96	1·66	1·45	1·28	1·15	1·05	0·96

zuständen, also bei Bestimmung der Biegelinie, weil jede Last S auch als Knicklast zu entsprechend größerer Knicklänge gedeutet werden kann und die Diskriminante (siehe Fig. 7) erst bei $\nu = \infty$ zu Null wird.

©Akademie d ...diezentrum.at

6. Der Einfluß einer Pfostenkraft auf den Widerstand W und die Beanspruchung des Querrahmens.

Der Rahmenwiderstand W ist definiert durch die Beziehung $W = \frac{1}{\delta}$, worin mit Bezug auf Fig. 8 δ die durch die Kräfte $R = 1$ erzeugte wagrechte Verschiebung des Rahmenkopfes bedeutet, die sich aus dem durch die Endverdrehung des Querträgers entstehenden Anteile $\delta' = \frac{h^2 b}{2 E J_q}$ und aus jenem, der aus der Verbiegung der

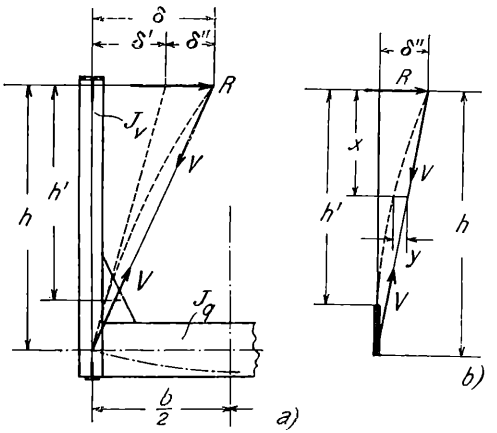

Fig. 8.

Vertikalen hervorgeht und mit δ'' bezeichnet werden soll, zusammensetzt. Bei fehlender Pfostenkraft ist dieser letztere $\delta'' = \frac{h'^3}{3 E J_v}$, wobei durch die Einführung des etwas kleineren Wertes h' darauf Rücksicht genommen wurde, daß nur ein Teil der ganzen Stablänge für die Verbiegung in Frage kommt, während für den Rest der Vertikalen infolge der Versteifung durch den Querträger und das Eckblech praktisch ein unendlich großes Trägheitsmoment angenommen werden kann. (Siehe Fig. 8 *b*.)

Den Einfluß einer Pfostendruckkraft V — eine Zugkraft möge der günstigen Wirkung wegen nicht in Betracht gezogen werden — deren Richtung mit der Sehne des verbogenen Stabes zusammenfällt, kann man bei Vorhandensein einer wagrechten Kraft R in folgender Weise ermitteln: Für einen beliebigen Punkt im Abstand x vom oberen Rand ist das Biegungsmoment:

$$M_x = R.x + Vy = -EJ_v y''$$

Mit den Hilfsgrößen:

$$v^2 = \frac{V}{E J_v} \text{ und } w^2 = \frac{R}{E J_v}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$y'' + v^2 y + w^2 x = 0.$$

Die den Randbedingungen:

$$x = 0,\ y = 0 \text{ und } x = h',\ y = \frac{h - h'}{h}\,\delta''$$

bereits angepaßte Lösung ist:

$$y = \frac{h - h'}{h}\,\delta''\frac{\sin v x}{\sin v h'} + \frac{R}{V}\left(h'\frac{\sin v x}{\sin v h'} - x\right).$$

Das Moment an beliebiger Stelle ist dann:

$$M_x = \frac{\sin v x}{\sin v h'}\left(V\delta''\frac{h - h'}{h} + R \,.\, h'\right); \tag{46}$$

mit dem aus dem Hilfsangriff $R = 1$ herrührenden Moment $\overline{M}_x = 1 \,.\, x$ folgt schließlich:

$$\delta'' = \int_0^{h'} \frac{M_x\,\overline{M}_x}{E J_v}\,dx = \frac{R}{V}\,h\,\frac{tg\,v h' - v h'}{tg\,v h' + (h - h')\,v} \tag{47}$$

Bei der Bestimmung des im Knickzustande notwendigen Rahmenwiderstandes tritt an die Stelle von V die mit der Sicherheitszahl vervielfachte Baulast des Pfostens, wofür wir das Zeichen V' wählen; ferner ist R durch 1 und v durch $v' = \sqrt{\frac{V'}{E J_v}}$ zu ersetzen. Wir erhalten in diesem Falle:

$$\delta'' = \frac{h}{V'}\,\frac{tg\,v' h' - v' h'}{tg\,v' h' + (h - h')\,v'}, \tag{48}$$

woraus für $V' = 0$ mittels des Grenzüberganges

$$\lim_{v' = 0} \frac{tg\,v' h' - v' h'}{v'^2\,[tg\,v' h' + (h - h')\,v']} = \frac{h'^3}{3\,h}$$

für δ'' der frühere Wert $\delta'' = \frac{h'^3}{3\,E J_v}$ folgt.

Die Gültigkeit dieser Beziehungen ist an das Bestehen des Proportionalitätsgesetzes gebunden. Trotz der üblichen großen Steifigkeit der Vertikalen senkrecht zur Ebene der Tragwand wird diese Bedingung besonders bei größeren Pfostenkräften nicht immer erfüllt sein, da man sonst genötigt wäre, sehr schwere Profile zu verwenden. Die Gleichung (48) ist dann nur annähernd richtig. Im übrigen ist der Einfluß von V' auf die Größe von W im allgemeinen nicht sehr bedeutend und kann nach Bleich auch durch die Formel:

$$\delta'' = \frac{h'^3}{3\,E\,J_v'}\,,\ \text{worin}\ J_v' = J_v - \frac{h'^2\,V'}{\pi^2\,E}\ \text{ist,} \tag{49}$$

näherungsweise zum Ausdruck gebracht werden.

Die Stelle der größten Biegungsbeanspruchung ergibt sich aus $\frac{d\,M_x}{d\,x} = 0$ zu $\cos\, v\,x = 0$, woraus $x = \frac{\pi}{2\,v}$ folgt. Bezeichnen wir mit h_v die zu einer Kraft V gehörige Knicklänge der Vertikalen, so gilt $V = \frac{\pi^2\,E\,J_v}{h_v^2}$; dann ist $v = \frac{\pi}{h_v}$ und daraus folgt weiters $x = \frac{h_v}{2}$. Bei der bereits erwähnten großen Steifigkeit der Vertikale wird die der verhältnismäßig kleinen Kraft V entsprechende Knicklänge immer größer sein als $2\,h'$; dann fällt aber $x = \frac{h_v}{2}$ außerhalb des wirklichen Stabbereiches und die größte Biegungsspannung tritt an der Stelle $x = h'$ auf, für welche

$$M_{\max.} = V\,\delta''\,\frac{h - h'}{h} + R\,h' \tag{50}$$

wird, worin δ'' durch (47) gegeben erscheint.

7. Beispiel.

Für den in Fig. 9 dargestellten Hauptträger einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke soll zunächst der Endrahmenwiderstand und darauf

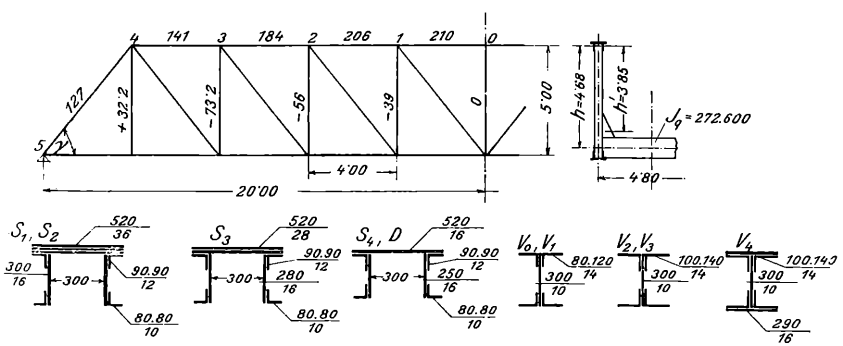

Fig. 9.

die Biegelinie des Obergurtes senkrecht zur Tragwandebene für die doppelte Baulast bestimmt werden. Die der Fig. 9 beigeschriebenen Stabkräfte stellen Größtwerte vor, die nicht gleichzeitig auftreten können. Dadurch, daß wir diese den nachfolgenden Berechnungen zugrunde legen, begehen wir einen Fehler, der jedoch auf Seite der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

größeren Sicherheit liegt. Die zulässige Beanspruchung ist 880 kg/cm^2, die Sicherheit, bezogen auf eine Zugfestigkeit von 3800 kg/cm^2, demnach $\varsigma = \frac{3800}{880} = 4 \cdot 32$. In der nachfolgenden Tabelle sind die erforderlichen Abmessungs- und Belastungsgrößen der Mittelfelder übersichtlich zusammengestellt. In den beiden letzten Kolonnen

Knoten	S ton	J cm^4	F cm^2	W_E t/cm	W für $4 \cdot 32$ V t/cm	W für 2 V t/cm
0				1·574	1·882	1·882
1	210	92500	353	1·428	1·770	1·823
2	206	92500	353	1·402	1·930	2·020
3	184	81500	305	1·412	1·890	1·978
4	141	59200	233			
Mittelwerte	185	81400	311		1·866	1·932

wurden aus den Rahmenabmessungen die Widerstände nach Gleichung (48) für die 4·32-fachen sowie für die doppelten Stabspannungen ermittelt. Die ersteren benötigen wir für den Knickfall, die letzteren bei Berechnung der Biegelinie. Aus dem Vergleiche beider Werte ersieht man auch den geringen Einfluß der Pfostenkraft. Die Knicklängen der Obergurte senkrecht zur Tragwandebene schwanken zwischen 1·712 a und 1·885 a, jene der Anlaufstrebe ist 1·64 a, was gegenüber der Voraussetzung $\nu = 1$ für diesen Stab, einen Überschuß an Sicherheit bedeutet; doch ist das verwendete Profil bezüglich der Knickung in der Tragwandebene erforderlich.

Bei der Bemessung der Vertikalen geht man zweckmäßig in der Weise vor, daß man mit den vorhandenen Stabkräften zunächst die Knicksicherheit in der Tragwandebene untersucht; sodann ermittelt man in jedem Knoten den nach Engesser erforderlichen Rahmenwiderstand, wobei man für S, J und F Mittelwerte aus den dem Knoten benachbarten Gurtstäben einführt. In der drittletzten Kolonne sind diese Engesserwerte enthalten; der tatsächlich vorhandene Rahmenwiderstand (vorletzte Kolonne) muß gemäß der Beziehung (41) entsprechend größer sein.

Für die weitere Rechnung ist es notwendig, Mittelwerte einzuführen, die in der letzten Zeile der vorigen Tabelle enthalten sind, wobei bemerkt sei, daß bei der Bestimmung des Mittelwertes von W alle Querrahmen (nicht nur die einer Brückenhälfte) in Rücksicht gezogen wurden.

Wir gehen zunächst an die Ermittlung des Endrahmenwiderstandes W_0. Es ist $J = 81400\ cm^4$, $F = 311\ cm^2$, daraus ergibt sich der Trägheitshalbmesser $i = \sqrt{\frac{81400}{311}} = 16 \cdot 2$. Die Knickziffer ist $\frac{1}{\alpha} = \frac{F \cdot s_{zul.}}{S} = \frac{311 \cdot 0 \cdot 880}{185} = 1 \cdot 480$, ihr entspricht ein Schlank-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

heitsverhältnis $\frac{l}{i} = 46 \cdot 7$, woraus $\nu = \frac{46 \cdot 7 \quad 16 \cdot 2}{400} = 1 \cdot 89$ folgt. Nach Engesser ist erforderlich:

$$W_E = \frac{\mathfrak{s}\, S \pi^2}{4\, a\, \nu^2} = \frac{4 \cdot 32 \cdot 185 \cdot \pi^2}{4 \cdot 400 \cdot 1 \cdot 89^2} = 1 \cdot 38\ t/cm.$$

Tatsächlich vorhanden ist $W = 1 \cdot 866\ t/cm$, das Verhältnis beider ergibt $c = \frac{1 \cdot 866}{1 \cdot 38} = 1 \cdot 35$; mit diesem Wert und $\nu = 1 \cdot 89$ finden wir aus der Tafel für $n = 4$ auf p. 93 durch Zwischenschaltung $\varepsilon = 1 \cdot 38$. Ferner ist $D = 127\ t$, $a' = a = 400\ cm$, $\cos \gamma = 0 \cdot 625$; nach Gleichung (44) erhalten wir also:

$$W_0 = \frac{4 \cdot 32 \cdot 127}{400} \cdot 0 \cdot 625 + 1 \cdot 38 \cdot 1 \cdot 866 = 0 \cdot 858 + 2 \cdot 58 = 3 \cdot 44\ t/cm.$$

Das in der Fig. 9 dargestellte Profil der Endvertikale V_4 liefert in Verbindung mit den ebenfalls angegebenen Querschnittsabmessungen den vorhandenen Wert $W_0 = 3 \cdot 54\ t/cm$, ist somit vollkommen ausreichend.

Für die nun folgende Ermittlung der Biegelinie mögen die gleichen Kräfte wie vorhin verwendet werden, wenngleich die vorausgesetzte symmetrische Belastungsart der Brücke kleinere Werte liefern würde. Eine genauere Berechnung der zu einer bestimmten Laststellung gehörenden Stabkräfte erscheint auch gar nicht angebracht, da wir schon durch die Einführung von Mittelwerten für Last- und Querschnittsgrößen eine Vernachlässigung begangen haben und eine weitere Vereinfachung in der nur selten erfüllten Annahme gleich belasteter Mittelquerträger treffen müssen, wofür wir in diesem Beispiel zwei symmetrisch zur Brückenachse gelegene, $1 \cdot 50\ m$ voneinander entfernte Einzellasten von je $15\ t$ und für den Endquerträger solche von $10\ t$ in Rechnung stellen können. Die durch die doppelten Belastungen hervorgerufenen Rahmenkopfverschiebungen sind dann $\delta = 0 \cdot 622$ und $\delta_0 = 0 \cdot 414\ cm$. Mit

$$\varphi = 400 \sqrt{\frac{2.185}{2150.81400}} = 0 \cdot 5816, \sin \varphi = 0 \cdot 5493, \cos \varphi = 0 \cdot 8356,$$

$\frac{a\,W}{2\,S} = \frac{400 \cdot 1 \cdot 932}{2.370} = 1 \cdot 0443$, $\frac{a\,W}{2\,S\,\varphi} = \frac{1 \cdot 0443}{0 \cdot 5816} = 1 \cdot 7956$ erhalten wir aus (19): $k = 0 \cdot 8888$, $r = 0 \cdot 9493$. Dann wird nach (25): $\rho = \sqrt{r - k^2} = 0 \cdot 3991$ und die Beziehungen (30 a) liefern: $\mathfrak{Cof}\, \alpha = 1\ 1724$, $\cos \beta = 0 \cdot 7581$, woraus $\alpha = 0 \cdot 5790$ und $\beta = 40° 42'$ folgen. Aus (31) ergeben sich ferner $p = 690 \cdot 512$, $q = 295 \cdot 334$. Mit diesen Werten und $D = 2.127 = 254\ t$, $\cos \gamma = 0 \cdot 625$, $a = a' = 400\ cm$, $W_0 = 3 \cdot 54\ t/cm$ erhält man aus der ersten Gleichung (36): $N = 56.462 \cdot 7$ und schließlich aus (37) die Ausdrücke für die Unbekannten:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$M_x = 2 \cdot 5304\, F_1(x)$$
$$y_x = 0 \cdot 0001457\, M_x - 0 \cdot 002767\, F_2(x) + 0 \cdot 622.$$

Biegelinie und Momentenverlauf innerhalb zweier Knoten sind sodann in der am Schlusse des 4. Abschnittes gegebenen Weise zu ermitteln. Die Ergebnisse der Zahlenrechnung sind in den nachfolgenden Tabellen zusammengestellt. Entsprechend der Annahme von Gelenken in den Punkten 4 und 5 erleidet die Anlaufstrebe

	$F_1(x)$	M_x *tcm*	$F_2(x)$	y_x *cm*	R_x *t*
0	2·968	7·51	— 9·776	0·650	+ 0·0542
1	6·538	16·54	— 7·505	0·645	+ 0·0449
2	14·645	37·0	+ 1·653	0·623	+ 0·0015
3	18·174	46·0	+ 22·130	0·567	— 0·1052
4	—	—	+ 52·190	0·478	+ 0·2213
5	—	—	—	—	— 0·1896

Feld	Gleichung für y_ξ
0—1	$y_\xi = -0 \cdot 0312 \sin \varphi \frac{\xi}{a} + 0 \cdot 0447 \cos \varphi \frac{\xi}{a} + 0 \cdot 000073\, \xi + 0 \cdot 600$
1—2	$y_\xi = -0 \cdot 0710 \sin \varphi \frac{\xi}{a} + 0 \cdot 1000 \cos \varphi \frac{\xi}{a} + 0 \cdot 000194\, \xi + 0 \cdot 523$
2—3	$y_\xi = -0 \cdot 00675 \sin \varphi \frac{\xi}{a} + 0 \cdot 1242 \cos \varphi \frac{\xi}{a} + 0 \cdot 000199\, \xi + 0 \cdot 443$
3—4	$y_\xi = +0 \cdot 226 \sin \varphi \frac{\xi}{a} - 0 \cdot 000086\, \xi + 0 \cdot 478$
4—5	$y_\xi = 0 \cdot 000747\, \xi$

Feld	Gleichung für M_ξ
0—1	$M_\xi = -11 \cdot 54 \sin \varphi \frac{\xi}{a} + 16 \cdot 54 \cos \varphi \frac{\xi}{a}$
1—2	$M_\xi = -26 \cdot 27 \sin \varphi \frac{\xi}{a} + 37 \cdot 0 \cos \varphi \frac{\xi}{a}$
2—3	$M_\xi = -2 \cdot 50 \sin \varphi \frac{\xi}{a} + 46 \cdot 0 \cos \varphi \frac{\xi}{a}$
3—4	$M_\xi = +83 \cdot 62 \sin \varphi \frac{\xi}{a}$
4—5	$M_\xi = 0$

nur eine Schrägstellung und keine Verbiegung. Die Summe aller Stützendrücke muß Null sein, was eine Kontrolle für deren richtige Ermittlung aus den Überzähligen vorstellt.

In Fig. 10 sind Momentenverlauf und Biegelinie dargestellt. Das größte Biegungsmoment tritt im Knoten 3 auf und liefert im Stabe 3—4 eine zusätzliche Biegespannung $s_b = \frac{46000}{59200} . 26 = 20\ kg/cm^2$, das sind nicht einmal 2% der Normalspannung $s_n = \frac{2.141000}{233} = 1210\ kg/cm^2$. Von gleicher Größenordnung sind auch die Biege-

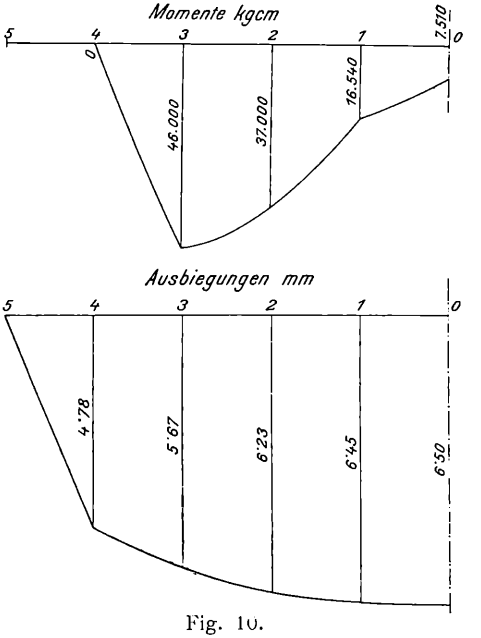

Fig. 10.

spannungen in den Vertikalen. Wir erhalten im Knoten 3 mit $vh' = 385 \sqrt{\frac{2.73 \cdot 2}{2150.22757}} = 0 \cdot 666$ aus (47) $\delta'' = 0 \cdot 0438\ cm$ und damit aus (50)

$$M_{max.} = 2.73 \cdot 2.0 \cdot 0438 \frac{83}{468} + 0 \cdot 1052 . 385 =$$

$$= 1\ 13 + 40 \cdot 4 = 41 \cdot 6\ tcm,$$

woraus eine Biegespannung $s_b = \frac{41\ 600}{22757}\ 15 = 27\ kg/cm^2$ folgt, die nur 3% der Normalspannung $s_n = \frac{2.73200}{150} = 976\ kg/cm^2$ vorstellt. Wie man sieht, ist der Einfluß der Pfostenkraft außerordentlich gering; das aus derselben resultierende Moment ist nur 1 13 *tcm*,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

d. i. $^{1}/_{37}$ des Gesamtbetrages. Etwas größer ist die Biegespannung im Endrahmen; sie beträgt dort $s_b = \frac{385.221}{45900}\, 16 \cdot 6 = 31\ kg/cm^2$.

In derselben Weise wurden auch noch andere Beispiele durchgerechnet. Charakteristisch ist in allen Fällen, daß die stärkste Gurtkrümmung und damit das größte Biegungsmoment an der vorletzten Stütze (n—1) auftritt, daß die beiden letzten Querrahmen am stärksten beansprucht werden und daß der Einfluß einer Pfostenkraft bei entsprechender Steifigkeit der Vertikalen nicht von Belang ist. Die zusätzlichen Biegespannungen selbst bilden nur einen geringen Bruchteil der Normalspannungen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: 137_2a

Autor(en)/Author(s): Schweda Friedrich

Artikel/Article: Die Bemessung des Endquerrahmens offener Brücken. 71-102