Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über ausgebildete Turbulenz

Von

Josef Kozeny in Wien

(Mit 7 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. April 1928)

Ein ideal glattes Rohr mit kreisrundem Querschnitt, dessen Achse in der x-Richtung liegen möge, sei von Wasser durchflossen. Mit Ausnahme einer dünnen laminaren Wandschichte wird im Innern turbulentes Strömen erfolgen; in jedem Punkte wird sich ständig Größe und Richtung der Geschwindigkeit v ändern. Man kann dann jederzeit eine Zerlegung letzterer vornehmen in eine Komponente $\bar{u}$ in der x-Richtung, die nur der Größe nach schwankt, und in eine solche $\bar{v}$ senkrecht hinzu, deren Größe und Richtung sich innerhalb der durch den Punkt gehenden Querschnittsebene ändert. Es ist leicht einzusehen, daß für den Impulsaustausch, der durch die Bewegungen in der Querschnittsebene bedingt ist, nur jene Komponenten $\bar{v}_1$ von $\bar{v}$ in Betracht kommen, die zu den Linien $u =$ konstant, den Isotachen, senkrecht sind. Dabei sei mit u der zeitliche Mittelwert von $\bar{u}$ bezeichnet und als Turbulenzgeschwindigkeit v_1 der Mittelwert des absoluten Betrages von $\bar{v}_1$ gemeint, der über einen entsprechenden Zeitraum genommen sei, daß die Summe der algebraischen Beträge verschwindet.

Bei den nun folgenden Betrachtungen wollen wir beharrlich die geometrischen Ähnlichkeitsbedingungen vergleichbarer Strömungsvorgänge einhalten, wodurch es möglich wird, eine Aussage über die Geschwindigkeitsverhältnisse zu machen. Diese Bedingungen finden ihren Ausdruck darin, daß sowohl die Längen- als auch die Geschwindigkeitsverhältnisse konstant sein müssen. Also muß in ähnlich gelegenen Punkten zweier Rohre mit der Bedingung

$$\frac{r_a}{R_a} = \frac{r_b}{R_b}$$

jeder Geschwindigkeit v_a eine gleichgerichtete v_b entsprechen, so daß

$$\frac{\bar{v}_{1a}}{\bar{u}_a} = \frac{\bar{v}_{1b}}{\bar{u}_b}$$

und hiermit auch die Mittelwerte die Bedingung erfüllen

$$\frac{v_{1a}}{u_a} = \frac{v_{1b}}{u_b} = c\,(\mathfrak{R}),$$

wobei c ($\mathfrak{R}$) eine nur von der Reynolds'schen Zahl $\mathfrak{R}$ abhängige Zahl ist. Auch müssen wir bei den folgenden Impulsrechnungen die Vorgänge immer in ähnlich gelegenen Räumen ins Auge fassen;

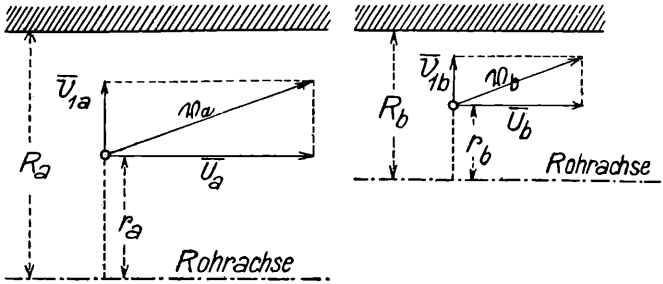

Fig. 1.

daraus folgt, daß zwei Isotachenzylinder vom Abstande δr dann ähnlich gelegen sind, wenn auch

$$b\delta r = D$$

st, wo b eine Proportionalitätskonstante ist und $D = 2\,R$ den Rohrdurchmesser bedeutet.

Betrachten wir nun den Vorgang, der sich innerhalb zweier Isotachenzylinder $u =$ konstant und $u' =$ konstant abspielt. Infolge

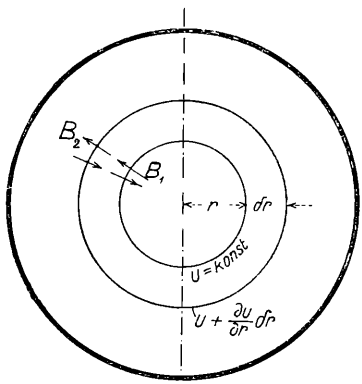

Fig. 2.

der Querbewegungen erfolgt mit dem Eintritt von Wassermasse durch die Fläche $2\,r\pi\,.\,1$ eine Impulswanderung

$$B_1 = \rho\,.\,v_1\,.\,2\,r\pi\,.\left\{\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{dr}{2}\right) - \left(u - \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{dr}{2}\right)\right\} =$$

$$= \rho\,.\,v_1\,.\,2\,r\pi\,.\,\frac{\partial u}{\partial r}\,dr, \tag{1}$$

wobei ρ die Dichte ist. Durch die Isotachenfläche $u' =$ konstant im genügend kleinen Abstande δr von der früheren, wandert der Impuls

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial r} . \delta r.$$

Der Differenz $B_2 - B_1 = \frac{\partial B_1}{\partial r} . \delta r$ entspricht ein Widerstand, der auf eine zwischen den Itotachen $u =$ konstant und $u' =$ konstant fließende Wassermasse ausgeübt wird, nämlich der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho . v_1 \quad 2 r \pi . \frac{\partial u}{\partial r} . dr\right) . \delta r.$$

Hierzu gesellt sich der Widerstand aus der inneren Reibung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\eta . 2 \pi r . \frac{\partial u}{\partial r}\right) . dr,$$

wo η die Zähigkeit sei. Da

$$\text{Pressung} = \text{Widerstand}$$

so gilt

$$-\gamma . J . 2 r \pi . dr = \frac{\partial}{\partial r}\left\{2 \pi r \quad \frac{\partial u}{\partial r} (\eta + \rho v_1 . \delta r)\right\} dr \tag{2}$$

oder

$$-g . J = \frac{\partial}{\partial r}\left\{(\nu + v_1 . \delta r) . \frac{\partial u}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r} (\nu + v_1 . \delta r) . \frac{\partial u}{\partial r}, \tag{2a}$$

wo $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ das kinematische Zähigkeitsmaß, J das Druckgefälle, γ das spezifische Gewicht und g die Schwerebeschleunigung sind.

Um die Bewegungsgleichung (2) integrieren zu können, muß $v_1 . \delta r$ als Funktion von u und r dargestellt werden. Da wir schreiben können

$$\mathfrak{R} = \frac{U . D}{\nu} = \frac{a . u_r . D}{\nu} = \frac{U . b . \delta r}{\nu},$$

wo a und b zugehörige Proportionalitätskonstanten sind und U die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit ist, so ergibt sich

$$\delta r = \frac{a}{b} \cdot \frac{u_r}{U} \quad D. \tag{3}$$

Für die Quergeschwindigkeit v_1 gilt die Bedingung, daß sie gegen die Rohrwand zu verschwinden muß. Wo das Gleiten in der Nähe der Wand beginnt, soll $u = u_r$ sein, wo u_r als Randgeschwindigkeit bezeichnet werde. Offenbar erfüllen alle Ausdrücke $v_1 = c_n (\mathfrak{R}) . (u - u_r)^n$ und ebenso auch

$$v_1 = \sum c_n (\mathfrak{R}) . (u - u_r)^n$$

die frühere Forderung. Aber aus der Bedingung geometrischer Ähnlichkeit geht hervor, daß nur das lineare Glied zur Anwendung kommen kann, also

$$v_1 = c (\mathfrak{R}) . (u - u_r) \tag{4}$$

zu setzen ist.

Es ist dann

$$v_1 . \delta r = 2 \varkappa (\mathfrak{R}) \frac{u_r}{U} (u - u_r) . R , \tag{4a}$$

wo $\varkappa (\mathfrak{R}) = c (\mathfrak{R}) \frac{a}{b}$ eine von der Reynolds'schen Zahl abhängige Größe ist. Setzen wir noch

$$\alpha = \nu - 2 \varkappa . \frac{u_r^2}{U} R \text{ und } \beta = 2 \frac{\varkappa . u_r}{U} R, \tag{4b}$$

so ist die Lösung der früheren Bewegungsgleichung (2a)

$$\frac{g . \beta . J}{2} \{(R - \triangle)^2 - r^2\} = (\alpha + \beta u)^2 \tag{5}$$

mit der Bedingung, daß für $r = R - \triangle$ die Geschwindigkeit $u = u_1$ und der Ausdruck $\alpha + \beta u_1 = \Theta$ sein soll, so daß

$$u_1 = \frac{-\alpha}{\beta} = u_r - \frac{\nu U}{2 \varkappa . u_r . R} \text{ ist.}$$

Ferner soll für $r = \Theta$, also in der Mitte $u = u_{\max.}$ sein. Dann gilt

$$\frac{g \beta J}{2} (R - \triangle)^2 = (\alpha + \beta u_{\max.})^2 \text{ oder aus (5) und (6)} \tag{6}$$

$$1 = \frac{r^2}{(R - \triangle)^2} + \frac{(\alpha + \beta u)^2}{(\alpha + \beta u_{\max.})^2} \tag{6a}$$

Da nun $\alpha + \beta u = \nu + v_1 \delta r = \varepsilon$ als Turbulenzkoeffizient bezeichnet wird, dessen Maximum $\varepsilon_{\max.} = \alpha + \beta u_{\max.}$ ist, so gilt auch

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_{\max.}^2} + \frac{r^2}{(R - \triangle)^2} = 1, \tag{7}$$

d. h. es herrscht eine ellipsoidische Turbulenzverteilung. Ist δ die Dicke der gleitenden Wandschicht, für $r = R - \delta$ also $u = u_r$, so ergibt sich aus (5)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r = R - \delta} = - \frac{g . J . (R - \delta)}{2 (\alpha + \beta u_r)} = - \frac{g . J . (R - \delta)}{2 \nu} \tag{8}$$

Nun gilt für die Wandschichte die Geschwindigkeitsverteilung der gleitenden Strömung

$$u = \frac{g J}{4 \nu} (R^2 - r^2), \tag{9}$$

woraus folgt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R-\delta} = -\frac{gJ.(R-\delta)}{2\nu} \tag{10}$$

Da (10) mit ( ) identisch ist, so ist zu ersehen, daß die Kurven für die radiale Geschwindigkeitsverteilung in der Randschicht und im turbulenten Innern im Abstande δ von der Wand eine gemeinsame Tangente haben, so daß ein stetiger Übergang erfolgt (Fig. 5). Es sei für den Abstand $r = r_m$ die Geschwindigkeit gerade so groß wie die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit U. Dann gilt

$$\frac{g.\beta.J}{2}\left\{(R-\triangle)^2-r_m^2\right\} = (\alpha+\beta U)^2 \tag{11}$$

oder

$$J = \frac{2}{g\left\{(R-\triangle)^2-r_m^2\right\}} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (\alpha+\beta U)^2$$

und falls Q die sekundliche Wassermenge bedeutet und $\triangle$ gegen den Halbmesser R vernachlässigt wird, ist mit 4 *b*)

$$\frac{J}{Q} = \frac{4}{g\left(1-\frac{r_m^2}{R^2}\right)} \quad \frac{1}{R^3\pi} \left\{\frac{\nu^2}{4\varkappa.R^2.u_r} + \varkappa \left(\frac{u_r}{U}\right) \left(1-\frac{u_r}{U}\right)^2 U + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{R}\left(1-\frac{u_r}{U}\right)\right\}, \tag{12}$$

wobei wieder das Glied mit ν^2 sehr klein ist und vernachlässigt werden kann. Anderseits kann man schreiben

$$\frac{J}{Q} = \frac{\psi.U^2}{2gD} \quad \frac{1}{\frac{\pi D^2 U}{4}} = \frac{\psi}{4gR^3\pi} \quad U, \tag{12a}$$

wenn ψ die Widerstandszahl bedeutet. Führen wir ψ in einer der Formen von Lees, Jakob usw. ein, so ist ersichtlich, daß $\frac{J}{Q} = f(\mathfrak{R})$ eine Asymptote hat (Fig. 3) und man ersieht daraus, daß für große $\mathfrak{R}$ sowohl $\varkappa$ ($\mathfrak{R}$) als auch $\frac{u_r}{U}$ wenig veränderlich sind. Es wurden die neueren Messungen von K. Fromm und A. Staus herangezogen und im nebenstehenden Diagramm Fig. 4 die Fromm'schen Messungen zwischen parallelen glatten Wänden in der Form $\frac{J}{Q} = f(\mathfrak{R}) = f\left(\frac{UD}{\nu}\right)$ eingetragen, jene von

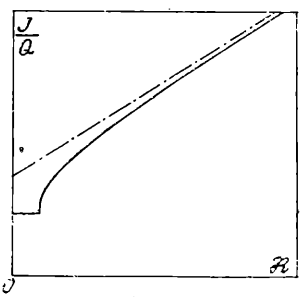

Fig. 3.

Staus in der Form $\frac{H}{Q} = \varphi(U)$, wo H der Druckabfall bezogen auf die Rohrlänge ist. Diese Darstellungsart erfolgte, um Nebenrechnungen und die damit verbundenen Fehler zu vermeiden. In den folgenden Tabellen sind die Zahlenwerte eingetragen. Merkwürdigerweise zeigen die Auftragungen (Fig. 4), daß die gemessenen Punkte auf geraden Linien liegen, wie dies schon R. Biel[1] für die Versuchsreihe von Saph und Schoder festgestellt hat, indem er $\frac{J}{U}$ als Funktion von U aufgetragen hat. Wahrscheinlich sind die Intervalle der Reynolds'schen Zahlen, in denen die Messungen von Fromm und Staus erfolgten, so klein, daß innerhalb derselben

$$\varkappa(\mathfrak{R}) = m + \frac{n}{\mathfrak{R}}$$

gesetzt werden kann, wo m und n entsprechende Konstanten sind. Die Geschwindigkeitsverhältnisse dagegen können als konstant angesehen werden. Jedenfalls widerspricht die Form der mit dem Ansatz $\varepsilon = \alpha + \beta u$ aufgestellten Gleichung (12) nicht den Messungsergebnissen.

Bei den Messungen von K. Fromm ist zu erwähnen, daß dieselben in einem rechteckigen Querschnitt von 150 *mm* Breite und 11·6 bis 26·2 *mm* Höhe erfolgten. Der Abstand der Seitenwände war genügend weit, um keinen wesentlichen Einfluß auf die Strömung auszuüben, so daß der Strömungsvorgang als zwischen zwei glatten parallelen Platten erfolgend angesehen werden kann.

Bedeutet d den Plattenabstand, z_m den Abstand von der Achse gerechnet, wo jene Geschwindigkeit herrscht, die der mittleren gleichkommt, so erhalten wir mit denselben Betrachtungen wie früher pro Breiteneinheit

$$\frac{J}{Q} = \frac{1}{2g\left\{1 - \frac{4z_m^2}{d^2}\right\}} \cdot \frac{1}{d^3}\left\{\varkappa . d . \left(\frac{u_r}{U}\right) \left(1 - \frac{u_r}{U}\right)^2 . U + \nu\left(1 - \frac{u_r}{U}\right)\right\}$$

und diese Gleichung stellt bei konstanten Geschwindigkeitsverhältnissen für kleinere Intervalle der Reynolds'schen Zahlen einen linearen Zusammenhang von U, beziehungsweise $\mathfrak{R}$ mit $\frac{J}{Q}$ dar.

Da nach früherem gesetzt werden kann

$$\alpha + \beta u = 2\varkappa \frac{u_r}{U} (u - u_r) . R + \nu$$

und

$$\alpha + \beta u_{\max.} = 2\varkappa \frac{u_r}{U} (u_{\max.} - u_r) . R + \nu,$$

[1] R. Biel, Forschungsarbeiten d. Ver. d. Ing., H. 44, Berlin 1907.

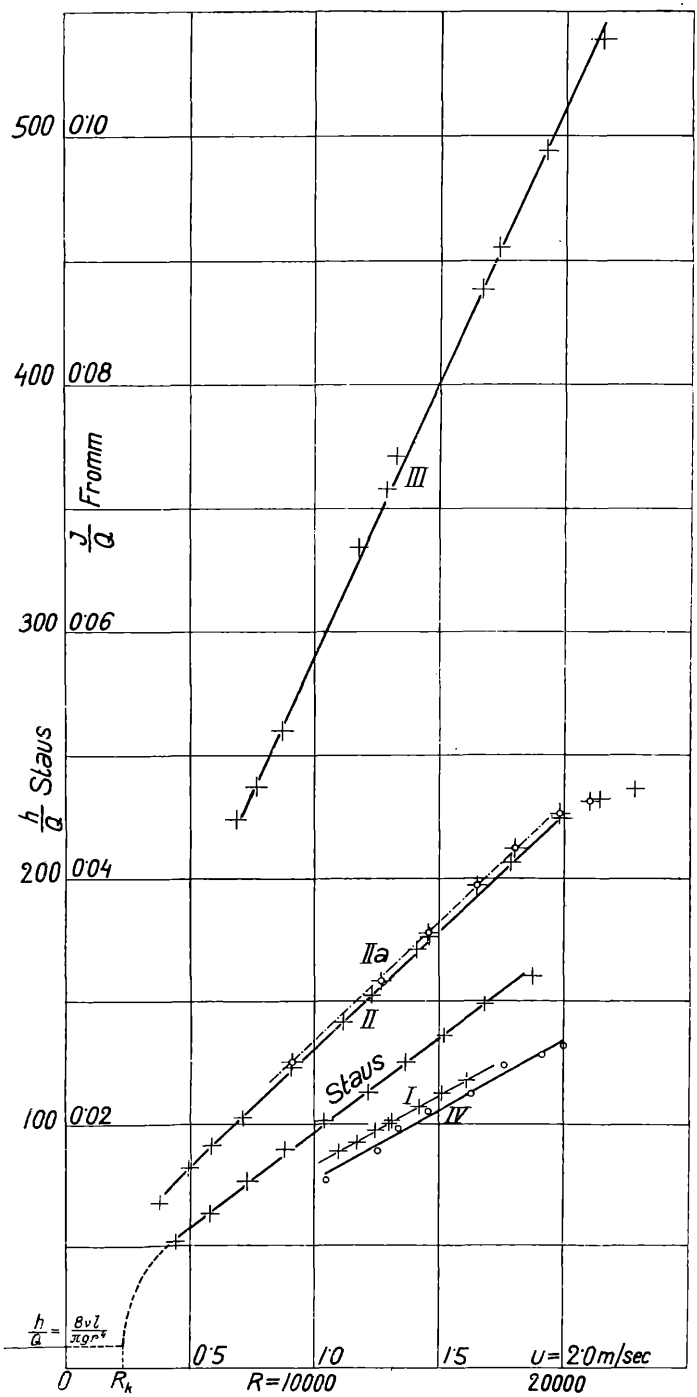

Fig. 4.

Messungen von K. Fromm.[1]

Glatte Rinne, $d = 1\ 16$, $l = 92\ cm$, $t = 9°$, $\nu = 0 \cdot 01375\ cm^2/\text{sec}$.

Gerade I der Fig. 4.

Q^2	Wassermenge Q in sl	Druckverlust H in cm	$\frac{J}{Q} = \frac{H}{l.Q}$	Reynolds'sche Zahl $\mathfrak{R}$
50·5	7·103	76·7	0·1174	16110
44·7	6·685	69·0	0·1122	15110
39·48	6·283	61·7	0·1068	14210
33·70	5·805	53·9	0·101	13100
32·85	5·73	52·6	0·1	12950
30·27	5·502	49·1	0·097	12420
27·0	5·2	44·1	0·092	11730
23·64	4·862	39·5	0·0883	10970

Glatte Rinne, $d = 2 \cdot 12\ cm$, $l = 92\ cm$, $t = 12°$, $\nu = 0 \cdot 0125 cm^2/\text{sec}$.

Gerade II, beziehungsweise IIa in der Fig. 4.

Q^2	Wassermenge Q in sl	Druckverlust H in cm	$\frac{J}{Q} = \frac{H}{l.Q}$	Reynolds'sche Zahl $\mathfrak{R}$
95·54	9·774	21·2	0·0236	22800
84·20	9·176	19·6	0·0232	21400
73·60	8·58	17·7	0·0224	20000
58·72	7·663	14·5	0·0206	17860
39·00	6·245	10·1	0·0176	14600
36·50	6·041	9·5	0·01708	14100
27·82	5·274	7·4	0·0152	12300
22·83	4·778	6·2	0·0141	11170
15·20	3·9	4·4	0·01226	9100
9·30	3·05	2·85	0·0102	7120
6·30	2·51	2·1	0·00908	5860
4·50	2·121	1·6	0·00820	4950
2·6	1·612	1·0	0·00676	3762

Gerade IIa.

Q^2	Wassermenge Q in sl	Druckverlust H in cm	$\frac{J}{Q} = \frac{H}{l.Q}$	Reynolds'sche Zahl $\mathfrak{R}$
80·66	8·98	19·1	0·0231	21000
59·10	7·687	15·0	0·0212	18000
72·35	8·506	17·7	0·0226	19800
49·90	7·064	12·8	0·0197	16500
39·00	6·245	10·2	0·01776	14580
29·43	5·425	7·7	0·0158	12670
15·30	3·91	4·5	0·0125	9130

[1] Abhandlungen des Aerodynamischen Instituts d. Techn. Hochschule Aachen, Heft 3, p. 2 der Zahlentafeln.

Glatte Rinne, $d = 1 \cdot 64\,cm$, $l = 92\,cm$, $t = 9 \cdot 5°$, $\nu = 0 \cdot 01335\,cm^2/\text{sec}$.

Gerade III der Fig. 4.

Q^2	Wassermenge Q in sl	Druckverlust H in cm	$\frac{J}{Q} = \frac{H}{l.Q}$	Reynolds'sche Zahl $\mathfrak{R}$
90·5	9·513	47·2	0·0539	21450
72·6	8·521	38·7	0·0494	19200
59·06	7·685	32·2	0·0455	17310
54·76	7·4	29·8	0·0438	16650
34·65	5·887	20·1	0·0371	13260
32·65	5·714	18·8	0·03576	12860
27·20	5·215	16·05	0·0334	11740
14·82	3·85	9·2	0·026	8680
11·60	3·407	7·45	0·0237	7670
9·35	3·058	6·3	0·0224	6880

Glatte Rinne, $d = 2 \cdot 62\,cm$, $l = 92\,cm$, $t = 10 \cdot 4°$, $\nu = 0 \cdot 0130\,cm^2/\text{sec}$.

Gerade IV der Fig. 4.

Q^2	Wassermenge Q in sl	Druckverlust H in cm	$\frac{J}{Q} = \frac{H}{l\,Q}$	Reynolds'sche Zahl $\mathfrak{R}$
98·50	9·93	11·9	0·0130	21620
84·35	9·184	21·2	0·01314	20000
76·65	8·755	10·3	0·01279	19100
65·14	8·07	9·2	0·01239	17600
55·80	7·47	7·7	0·0112	16300
44·45	6·67	6·4	0·0105	14550
37·40	6·115	5·5	0·00978	13350
32·95	5·74	4·7	0·00890	12510
23·06	4·80	3·4	0·00771	10460

Messungen von Staus[1]

an einem gezogenen Messingrohr von 4 cm Durchmesser.

Druckverlust h in m	Wassermenge Q in m^3/sec.	$\frac{h}{Q}$	Mittlere Geschwindigkeit U in m/sec.
0·029	0·000558	51·97	0·444
0·046	0·000728	63·19	0·580
0·070	0·000917	76·33	0·730
0·099	0·001105	89·59	0·879
0·132	0·001306	101·07	1·039
0·172	0·001528	112·63	1·216
0·214	0·001714	124·85	1·365
0·259	0·001909	135·67	1·518
0·314	0·002113	148·60	1·683
0·377	0·002357	159·95	1·876

[1] A. Staus, Maschinenuntersuchungen, I. Bd., Berlin, Springer, 1926, p. 192.

so kann für (6*a*) geschrieben werden

$$\frac{\left\{u-u_r+\frac{\nu}{2\varkappa R}\,\frac{U}{u_r}\right\}^2}{\left\{u_{\max.}-u_r+\frac{\nu}{2\varkappa R}\cdot\frac{U}{u_r}\right\}^2}+\frac{r^2}{(R-\triangle)^2}=1. \tag{14}$$

Dies ist der Ausdruck für eine elliptische Geschwindigkeitsverteilung mit den Halbachsen $R-\triangle$, beziehungsweise $u_{\max.}-u_r+$ $+\frac{\nu}{2\varkappa R}\,\frac{U}{u_r}$ wie in Fig. 5 zu sehen ist. Wie schon erwähnt, haben beim Übergang von der Geschwindigkeitsparabel der Wandschicht

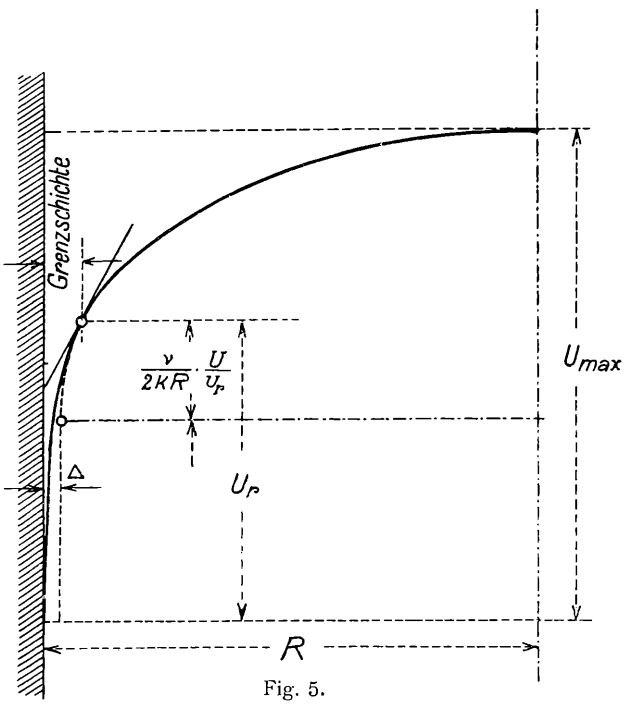

Fig. 5.

in die Ellipse der turbulenten Bewegung beide Kurven im Abstande δ von der Wand (zugleich Dicke der Wandschichte) eine gemeinsame Tangente.

Für gewöhnlich kann man namentlich für den Durchfluß die dünne Randschichte vernachlässigen und schreiben

$$\frac{(u-u_r)^2}{(u_{\max.}-u_r)^2}+\frac{r^2}{R^2}=1 \tag{14a}$$

und es ist dann die Durchflußmenge

$$Q=\frac{2}{3}\pi\,(u_{\max.}-u_r)\,.\,R^2+\pi R^2\,.\,u_r=U\,.\,R^2\pi, \tag{15}$$

also ist

$$U = u_r + \frac{2}{3}(u_{\max.} - u_r) \quad \text{oder} \quad \frac{U}{u_r} = \frac{2}{3}\,\frac{u_{\max.}}{u_r} + \frac{1}{3}. \tag{16}$$

Aus Gleichung (6) ergibt sich bei erlaubter Vernachlässigung von $\triangle$ gegen R

$$g.J.R = \frac{2\,u_r}{U}(u_{\max.} - u_r)^2 \left(2\,\varkappa + \frac{U}{u_{\max.} - u_r}\,\frac{2\,\nu}{R\,u_r}\right) \tag{17}$$

Das Glied $\frac{U}{u_{\max.} - u_r}\,\frac{2\,\nu}{R.u_r} = \frac{2\,U}{u_{\max.} - u_r}\,\frac{\delta}{D}\,\frac{\nu}{\delta\,u_r}$ ist, wie wir sehen werden, klein gegen $2\,\varkappa$, so daß wir es in erster Näherung vernachlässigen können. Ferner kann Gleichung (4a) geschrieben werden

$$v_1.\delta r = \varphi\left(\mathfrak{R}, \frac{r}{R}\right).\nu = 2\,\varkappa\,\frac{u_r.\delta}{\nu}\,\frac{(u - u_r)}{U}\,\frac{R}{\delta}\,\nu,$$

indem der Widerstandskoeffizient als erhöhte Reibung ν aufgefaßt wird, wobei aber $\varphi\left(\mathfrak{R}, \frac{r}{R}\right)$ sowohl von der Reynolds'schen Zahl als auch von der Lage im Querschnitt abhängig ist. Es ist dann

$$\varkappa = \frac{\nu}{u_r.\delta}\,\varphi\left(\mathfrak{R}, \frac{r}{R}\right)\,\frac{U}{u - u_r}\,\frac{\delta}{D}$$

Wenn wir nun die Auffassung hegen, daß die reine Turbulenz von den Wandverhältnissen (Rauhigkeit) unabhängig ist und daher

$$\varkappa = \frac{\nu}{u_r.\delta}$$

setzen, so erhalten wir aus (17) mit der vorgenannten Vernachlässigung

$$g.J\;R = 4\,\frac{\nu}{u_r.\delta}\cdot\frac{u_r}{U}(u_{\max.} - u_r)^2, \tag{18}$$

anderseits ergibt sich aus (10) bei Vernachlässigung von δ gegen R

$$g.J.R = 2\,\nu\,\frac{u_r}{\delta} \tag{19}$$

und (18) mit (19) ergibt

$$\frac{2\,u_r}{U}\left(\frac{u_{\max.}}{u_r} - 1\right)^2 = 1. \tag{20}$$

Diese Gleichung gibt mit (16)

$$\frac{U}{u_r} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{U}{2\,u_r}} + 1. \tag{21}$$

Daraus folgt

$$\frac{U}{u_r} = 1 \cdot 59, \quad \frac{u_r}{u_{\max.}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{U}{2\,u_r} + 1}} = 0 \cdot 528,$$

$$\frac{U}{u_{\max.}} = \frac{U}{u_r} \; \frac{u_r}{u_{\max.}} = 1 \cdot 59 . 0 \cdot 528 = 0 \cdot 84$$

und

$$r_m = R . \sqrt{\frac{5}{9}} = 0 \;\; 745\, R.$$

Diese berechneten Verhältnisse stimmen mit den Messungen recht gut überein, wie folgende Beispiele zeigen:

1. Messungen von Nikuradse[1] an einem glatten Kreisrohr von $2 \cdot 8$ *cm* Durchmesser mit Pitotrohr von $0 \cdot 233$ *mm* Weite. Mit $u_{\max.} = 9 \cdot 41$ *m*/sec. ist $u_r = 0 \cdot 528\; u_{\max.} = 4 \cdot 97$ *m*/sec. u wird berechnet aus (14 *a*) in der Form

$$\left(\frac{u}{4 \cdot 97} - 1\right)^2 + 0 \cdot 4076\, r^2 = 0 \cdot 799 \tag{22}$$

und in der folgenden Tabelle eingetragen.

Abstand v. d. Wand $R-r$ in *cm*	Messung $u = m$/sec.	Rechnung u in *m*/sec.	$\frac{\triangle u}{u}$
0·026	5·24	5·82	—
0·051	6·08	6·15	+ 0·0115
0·077	6·44	6·43	— 0·0016
0·115	6·83	6·73	— 0·0146
0·153	7·05	6·99	— 0·0085
0·229	7·40	7·40	0·000
0·305	7·70	7·74	+ 0·0052
0·457	8·26	8·25	— 0·0012
0·609	8·64	8·63	— 0·00115
0·761	8·94	8·92	— 0·0022
0·913	9·13	9·13	0·000
1·065	9·22	9·28	+ 0·0065
1·217	9·41	9·37	— 0·0042
1·369	9·39	9·41	+ 0·0021

Bedenkt man, daß bei einem Durchmesser von $0 \cdot 233$ *mm* des Pitotrohres in der Entfernung $0 \cdot 26$ *mm* von der Wand kaum ein genaues Meßergebnis erhalten wird, daß infolge des Wandeinflusses eine kleinere Geschwindigkeit gemessen wird, so wird man es gerechtfertigt finden, wenn man bei der Untersuchung der Genauigkeit von Messung und Rechnung die Messung in $0 \cdot 26$ *mm* Wandabstand nicht berücksichtigt. Es beträgt dann die Summe der positiven Abweichungen $+ 0 \cdot 0253$, jene der negativen $- 0 \cdot 0333$. Die durchschnittliche Abweichung ist $0 \cdot 0045$, beziehungsweise $0 \cdot 45\%$ von der Messung.

[1] J. Nikuradse, Forschungsarbeiten d. Ver. d. Ing., H. 281.

2. Messungen in einem Kreisrohr von $D = 1608\ mm$ der »Centrál de Cinca« der S. A. Hidroelectrica Iberica, Bilbao. Diese Flügelmessungen wurden von den Verkstaden Kristinehamn ausgeführt.[1]

a) $u_{\max.} = 2 \cdot 45\ m/\text{sec.}$ gemessen, $R = 0 \cdot 804\ m$, aus Gleichung (14*a*) folgt

$$u_r = 0 \cdot 528\ u_{\max.} = 1 \cdot 294\ m/\text{sec.}$$

und

$$u = 1 \cdot 294 + \frac{1 \cdot 156}{0 \cdot 804} \cdot \sqrt{0 \cdot 804^2 - r^2} = 1 \cdot 294 + 1 \cdot 438 \cdot \sqrt{0 \cdot 646 - r^2}.$$

r Metern	Messung u m/sec.	Rechnung u m/sec.	Abweichung $\triangle u$	$\frac{\triangle u}{u}$ in %
0	2·45	2·45	θ	θ
0·20075	2·413	2·37	+ 0·043	+ 1·8
0·37575	2·315	2·285	+ 0·030	+ 1·3
0·50575	2·193	2·185	+ 0·008	+ 0·37
0·58075	2·092	2·11	— 0·018	— 0·86
0·65575	1·964	2·015	— 0·051	— 2·5
0·73075	1·774	1·76	+ 0·014	— 0·79

Durchschnittliche Abweichung $= \frac{7 \cdot 62}{7} = 1 \cdot 09\%$.

b) Bei einer weiteren Messung wurde $u_{\max.} = 1\ 105\ m/\text{sec.}$ vermittelt. Es waren also kleinere Geschwindigkeiten vorhanden. Die Wandrauhigkeit, die ja ein relativer Begriff ist, kam noch weniger zur Geltung, so daß die Forderung der Glätte besser erfüllt war. Dementsprechend ist die Übereinstimmung von Messung und Rechnung eine noch bessere.

$u_r = 0 \cdot 528\ u_{\max.} = 0 \cdot 583\ m/\text{sec.}$ und die Geschwindigkeit wurde ermittelt aus der Gleichung

$$u = 0 \cdot 583 + 0 \cdot 6492 \cdot \sqrt{0 \cdot 646 - r^2}.$$

Folgende Tabelle gibt wieder eine Übersicht.

r in mm	Messung u in m/sec.	Rechnung u in m/sec.	$\triangle u$	$\frac{\triangle u}{u}$ in %
θ	1·105	1·105	θ	θ
200·75	1·085	1·088	+ 0·003	+ 0·28
375·75	1·035	1·045	+ 0·010	+ 0·96
505·75	0·985	0·989	+ 0·004	+ 0·41
580·75	0·945	0·944	— 0·001	— 0·11
655·75	0·885	0·885	θ	+ θ
730·75	0·785	0·800	+ 0·015	+ 1·91

Durchschnittliche Abweichung $= \frac{3 \cdot 67}{7} = 0 \cdot 52\%$.

[1] Nach Angaben von H. Krey, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1927, H. 2, p. 112.

Es sei bemerkt, daß nach Ingenieur S. Bitterli,[1] einem der erfahrensten Praktiker für Turbinenabnahmeversuche in der Schweiz, die mit hydrometrischen Flügeln bei sorgfältigen Vorkehrungen zu erreichende Meßgenauigkeit von 1% als vortrefflich bezeichnet werden muß.

Werden in den Messungen von Nikuradse $U = 0 \cdot 84\, u_{\max.} = 7 \cdot 90\, m/\text{sec.}$ und $\nu = 0 \cdot 013\, cm^2/\text{sec.}$ gesetzt, so ergibt sich eine Reynolds'sche Zahl von etwa

$$\mathfrak{R} \sim 170.000.$$

Da

$$J = \psi \cdot \frac{U^2}{2gD}, \tag{23}$$

wenn ψ die Widerstandszahl ist und aus Gleichung (9) für $r = R - \delta$ die Geschwindigkeit

$$u = u_r = \frac{gJ}{2\nu} . R . \delta$$

oder

$$J = \frac{2\nu . u_r}{g . R . \delta}, \tag{24}$$

so folgt aus (23) und (24)

$$\frac{\delta}{D} = \frac{8}{\psi} \cdot \frac{u_r}{U} \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}}. \tag{25}$$

Nun kann man bekanntlich bei Voraussetzung einfacher Proportionalität des Impulsverlustes in der laminaren Wandschichte mit der Reibungskraft in derselben ableiten, daß die Grenzschichtendicke proportional ist $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{R}}}$. Wäre dies der Fall,[2] so müßte

$$\frac{u_r}{U} \sim \frac{\psi}{8} \cdot \sqrt{\mathfrak{R}}$$

sein.

Da nun mit ziemlicher Genauigkeit

$$\psi = 0 \cdot 00648 + \frac{0 \cdot 54}{\sqrt[3]{\mathfrak{R}}} (= 0 \cdot 01623 \text{ bei Nikuradse})$$

gesetzt werden kann, ist ersichtlich, daß für genügend große $\mathfrak{R}$ die Randgeschwindigkeit $u_r > U$ werden müßte, was kaum der Fall sein dürfte. Aus Gleichung (25) kann man schließen, daß für größere Reynolds'sche Zahlen die Grenzschichtdicke nahezu mit

---

[1] Siehe »Wasserkraft und Wasserwirtschaft«, Berlin-München 1928, Fachheft für Gewässerkunde, p. 98.

[2] Siehe auch Handbuch der Physik, Bd. VII, Berlin, Springer, 1927, p. 122.

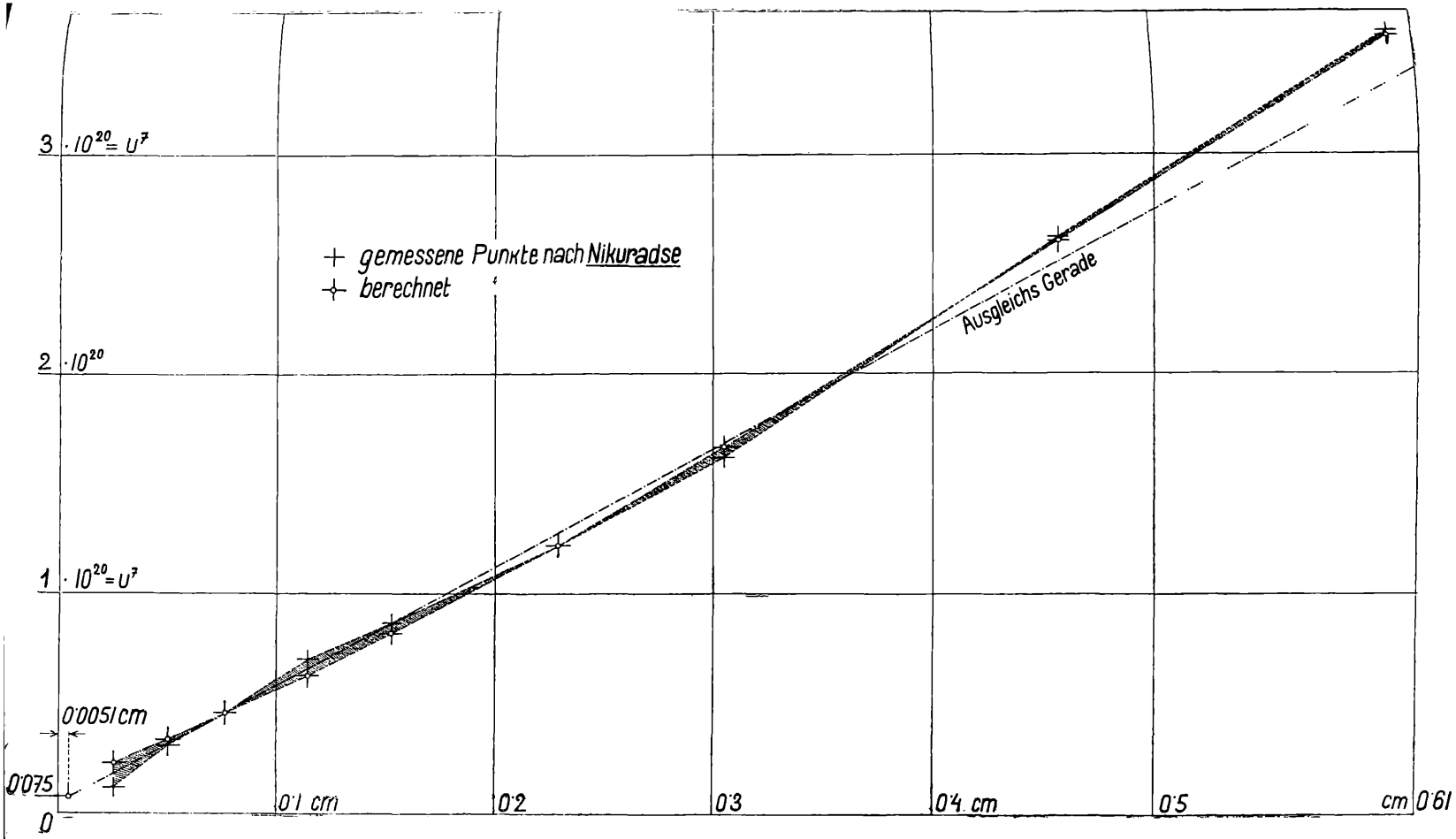

Fig. 6.

$\frac{1}{\mathfrak{R}}$ wächst. Die Dicke der Grenz- oder Wandschichte beim Versuch von Nikuradse wäre

$$\delta = \frac{8\nu}{\psi} \cdot \left(\frac{u_r}{U}\right) \cdot \frac{1}{U} = \frac{8.0 \cdot 013}{0 \cdot 0162} \cdot 0 \cdot 629 \cdot \frac{1}{790} = 0 \cdot 0051 \; cm.$$

In dem Diagramm Fig. 6 wurden zum Vergleich der Genauigkeit die Werte ($U^{1/7}$ gemessen) und ($U^{1/7}$ nach der Ellipsenregel gerechnet) als Ordinaten, die entsprechenden Wandabstände als Abszissen aufgetragen und außerdem eine ausgleichende Gerade gezeichnet, die der Potenzregel $u = a\,(R-r)^{1/7}$ entspricht. Diese Auftragung zeigt eine weit bessere Übereinstimmung der elliptischen Verteilung mit der Messung als die Verteilung nach der $^1/_7$ Potenzregel.[1] Der Ausdruck für $\varkappa$ hat den Wert

$$\varkappa = \frac{\nu}{u_r \cdot \delta} = \frac{\psi}{8} \left(\frac{U}{u_r}\right)^2 \sim \frac{1}{195},$$

so daß die frühere Vernachlässigung in Gleichung (17) zulässig erscheint.

Trotzdem die Reynolds'sche Zahl bei den Messungen an dem Turbinenrohr in Kristinehamn sehr groß war, zeigte sich dieselbe Geschwindigkeitsverteilung wie bei dem glatten Messingrohr Nikuradse's mit nur 2·8 *cm* Durchmesser und einer weit kleineren Reynolds'schen Zahl. Bei größeren Geschwindigkeiten machte sich der Einfluß der Wandrauhigkeit fühlbar. Der Vergleich der Messungen von Nikuradse und in Kristinehamn führt die Relativität des Begriffes der Wandrauhigkeit so recht vor Augen, indem sich bei kleineren Geschwindigkeiten das weite Turbinenrohr hydraulisch ebenso glatt verhielt wie das enge Messingrohr Nikuradse's bei großen Geschwindigkeiten. Ein vollkommen glattes Rohr gibt es nicht, so daß bei entsprechend großen $\mathfrak{R}$ immer Rauhigkeitseinflüsse zur Geltung kommen müssen, die auch bei technisch glatten Rohrwandungen (gezogene Messingrohre usw.) eine kleine Änderung der Geschwindigkeitsverteilung mit sich bringen können.

Denn auch die Wandrauhigkeit ruft Bewegungen in der Querschnittsebene hervor, die Anlaß zum Impulsaustausch und zu erhöhtem Widerstand geben. Während aber die Querbewegungen der »reinen« von der Wandbeschaffenheit unabhängigen Turbulenz zur Wandung hin abklingen, ist es bei den Querbewegungen aus der Rauhigkeit der Wand, den Pulsationen der Hydrauliker, umgekehrt der Fall. Letztere werden um so kleiner, je mehr wir uns vom Orte der Störung, der Wand, entfernen. Durch die Wechselwirkung des Impulsaustausches aus reiner Turbulenz und der Wandrauhigkeit wird die Erscheinung der Höcker in den Geschwindigkeitskurven

[1] Siehe Handbuch der Physik, Bd. VII, Berlin, Springer, 1927, p. 145.

hervorgerufen (Fig. 7), die beim Strömen durch Röhren bei größeren Geschwindigkeiten immer wieder beobachtet wird. Der Vorgang ist so, daß bei kleineren Geschwindigkeiten die Bewegung wie in glatten Röhren erfolgt; mit Zunahme der Geschwindigkeit macht sich der Einfluß der Wandrauhigkeit immer fühlbarer, die Geschwindigkeitskurve verflacht auffallend in der Mitte, bis endlich die Höcker auf-

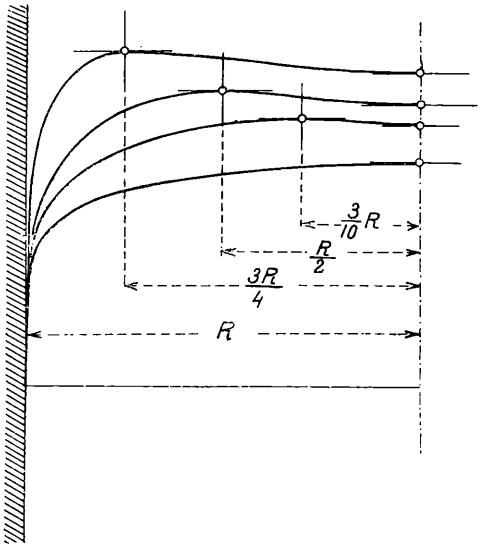

Fig. 7.

treten. Es liegt in der Natur des Vorgangs, daß man die Gleichung (2) nicht einfach erweitern kann in der Form

$$-\gamma . J . 2 r \pi . d r = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 r \pi . \frac{\partial u}{\partial r} . (\eta + \rho v_1 . \delta r + \rho v_2 . \delta r) \right\} d r, \quad (26)$$

wo v_2 die nach irgendeinem Gesetze verteilte Quergeschwindigkeit aus der Rauhigkeit ist. Auch rein formal zeigt sich die Unmöglichkeit. Denn die Tangente

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\nu + v_1 . \delta r + v_2 . \delta r} . \frac{g J r}{2}$$

wird beim Auftreten der Höcker in drei Punkten des Radialschnitts Null, und zwar in der Mitte bei $r = \Theta$ und in zwei symmetrisch zur Achse gelegenen Punkten $r = r_1$; in letzteren müßte

$$\nu + v_1 \delta r + v_2 \delta r = \infty$$

sein, damit $\frac{\partial u}{\partial r} = \Theta$ sei, was unmöglich ist.

Wir verlegen den Einfluß der Rauhigkeit in das Druckgefälle entsprechend der Anschauung, daß das Druckgefälle in jedem Punkte

des Querschnitts einen Verlust $\varphi(\mathfrak{r})$ erleidet, der eine Funktion der Wandrauhigkeit, der Reynolds'schen Zahl und der Lage des Punktes ist. Es ist dann (2) in erweiterter Form

$$-2g\pi J\left\{1-\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{J}\right\}.r\,dr=\frac{\partial}{\partial r}\left\{2r\pi(\nu+v_1.\delta r)\frac{\partial u}{\partial r}\right\}dr \qquad (27)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\nu+v_1\delta r}.\left\{\frac{g.J.r}{2}-\frac{g}{r}.\int r.\varphi(\mathfrak{r}).dr\right\}.$$

Da für $r=\theta$, beziehungsweise $r=r_1$ $\frac{\partial u}{\partial r}=\theta$ sein soll, so muß für $r<r_1$

$$\frac{g}{r}\int_0^{r<r_1} r.\varphi(\mathfrak{r})\,dr>g\frac{Jr}{2} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial r}$$

positiv sein, ferner für $r>r_1$

$$\frac{g}{r}.\int_0^{r>r_1} r.\varphi(\mathfrak{r}).dr<\frac{g.J.r}{2} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial r}$$

negativ und

$$\frac{g}{r}.\int_0^{r_1} r.\varphi(\mathfrak{r}).dr=\frac{gJr}{2}$$

sein.

Dabei stellt J einen mittleren Wert des Druckgefälles dar, während $\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{J}$ mit der Lage des Punktes im Querschnitt veränderlich ist.

Setzen wir bei einem reinen Rechenbeispiel

$$\frac{\varphi(r)}{J}=\frac{2r}{R},$$

welcher Ansatz (1. Näherung) einer linearen Abnahme des Rauhigkeitseinflusses von der Wand gegen die Rohrachse entspricht, so gilt

$$(\nu+v_1.\delta r).\frac{\partial u}{\partial r}=-Jg\left\{\frac{r}{2}-\frac{1}{r}\int r.\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{J}.dr\right\}=$$

$$=-Jg\left(\frac{r}{2}-\frac{2}{3}\frac{r^2}{R}\right). \qquad (28)$$

Mit demselben Ansatz für $v_1.\delta r$ wie früher ergibt sich aus (28)

$$\frac{(u-u_r)^2}{(u_{\text{Mitte}}-u_r)^2}=9\frac{r^2}{R^2}-8.\frac{r^3}{R^3}+1 \qquad (29)$$

für $r = \Theta$ (Mitte) und $r_1 = \frac{3}{4} R$ wird dann $\frac{\partial u}{\partial r} = \Theta$; bei $r = \frac{3}{8} R$ hat die Geschwindigkeitskurve eine Wendetangente und für $r = r_1 = \frac{3}{4} R$ ist $u = u_{\max.}$.

Aus (29) ergibt sich

$$\frac{(u_{r_1} - u_r)^2}{(u_{\text{Mitte}} - u_r)^2} = 9 . \frac{9}{16} - 8 . \frac{27}{64} + 1 = 2 \cdot 6875$$

oder

$$\frac{u_{r_1}}{u_r} - 1 = \left(\frac{u_{\text{Mitte}}}{u_r} - 1\right) . \sqrt{2 \cdot 6875} = 1 \cdot 64 \frac{u_{\text{Mitte}}}{u_r} - 1 \cdot 64$$

$$\frac{u_{r_1}}{u_{\text{Mitte}}} = 1 \cdot 64 - 0 \cdot 64 \frac{u_r}{u_{\text{Mitte}}}.$$

Da $\frac{u_r}{u_{\text{Mitte}}} < 1$ ist, so wird $u_{r_1} > u_{\text{Mitte}}$ und es zeigen sich zwei Höcker.

Je flacher der Abfall von $\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{J}$ vom Rande gegen die Mitte, je kleiner also der Einfluß der Rauhigkeit, desto näher liegen die Höcker gegen die Mitte.

Für

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{J} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{r}{R} \text{ ist } r_1 = \frac{R}{2},$$

für

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{J} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \frac{r}{R} \text{ ist } r_1 = \frac{3}{10} R \text{ usw.}$$

In der Fig. 7 ist der Übergang der Geschwindigkeitskurve bei zunehmender Rauhigkeit, beziehungsweise zunehmender Reynoldsscher Zahl aus der Ellipse in die Sattelkurven dargestellt.