Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über Rutherford's Wechselfeldmethode zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Gasionen

Von

Heinrich Mache

wirkl. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Mit 4 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Oktober 1928)

I. Teil.

Persistenz und Ionengeschwindigkeit.

G. Jäger[1] hat als erster die Erscheinung der Persistenz der molekularen Geschwindigkeit aufgefunden und für die Berechnung der inneren Reibung der Gase in ihrer Bedeutung voll erkannt. Lenard[2] hat sie kurz darauf bei Bewegung der Gasionen im elektrischen Feld berücksichtigt.

Ist τ die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen, $\varepsilon = mg$ die Kraft, mit welcher das Einheitsfeld auf das Ion wirkt, $\bar{l}$ die mittlere Weglänge des Ions und $\bar{c}$ seine mittlere molekulare Geschwindigkeit, die wir als groß gegen seine Feldgeschwindigkeit ansehen wollen, so kommt das Ion mit einer Geschwindigkeit zum ersten Zusammenstoß, die in der Richtung des Feldes

$$v = g\tau = \frac{\varepsilon}{m}\frac{\bar{l}}{\bar{c}}$$

beträgt.

Von dieser Geschwindigkeit behält das Ion einen Rest βv, wo β den »Koeffizienten seiner Persistenz« (Jeans) bezeichnet. Auf dem Weg zum zweiten Zusammenstoß kommt wieder v dazu, so daß die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung des Feldes nach dem zweiten Zusammenstoß $(v+\beta v)\,\beta$ beträgt. Vor dem dritten Zusammenstoß ist dieser Betrag wieder um v, also auf $v\,(1+\beta+\beta^2)$ gewachsen. Setzen wir diese Betrachtung fort, so ergibt sich schließlich eine maximale Geschwindigkeit

$$v\,(1+\beta+\beta^2+\ldots) = \frac{v}{1-\beta},$$

die weiterhin nicht mehr wächst. Dieser stationäre Zustand ist offenbar dann eingetreten, wenn das Ion bei jedem Zusammenstoß ebensoviel an Geschwindigkeit verliert, als es am Weg zum nächsten

[1] Diese Sitz.-Ber., *108*, 452 (1899).
[2] Ann. d. Phys., *3*, 298 (1900).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zusammenstoß wieder gewinnt. Jeden Weg beginnt das Ion in diesem stationären Endzustand mit der Geschwindigkeit $\frac{v\beta}{1-\beta}$ und endet ihn mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{1-\beta}$ Dazwischen steigt die Geschwindigkeit mit der Zeit proportional an. Es kommt also auf dasselbe hinaus, als ob das Ion sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$u = \frac{v\beta}{1-\beta} + \frac{v}{2} = v\left[\frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta}\right] = \frac{v}{2}\,\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

bewegen würde.

Den Koeffizienten der Persistenz β findet man genähert durch die folgende Überlegung:

Die Molekeln des Gases denken wir uns in Ruhe und fürs erste von der gleichen Masse wie das Ion. Ist $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit, die das Ion in der Feldrichtung im Moment des Zusammenstoßes besitzt, dann wird, vollkommen elastischen Stoß vorausgesetzt, das Ion nach dem Zusammenstoß sich in der Richtung der Berührungsebene bewegen, und zwar mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}\sin\varphi$, wo φ den Winkel zwischen der Flugrichtung des Ions und der Verbindung der Zentren von Ion und Molekel bedeutet. Die Normalkomponente wird an die ruhende Molekel abgegeben. In der ursprünglichen Flugrichtung behält also das Ion dle Geschwindigkeit $\mathfrak{v}\sin^2\varphi$.

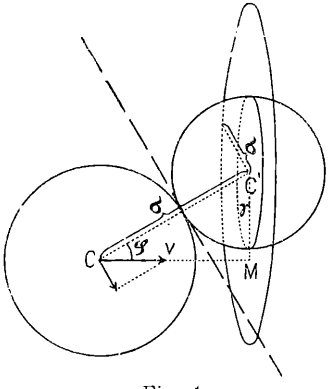

Fig. 1.

Um den Mittelwert über alle möglichen Stöße zu erhalten, denken wir uns um C' einen Kreis mit der Strecke $CC' = \sigma$ als Radius senkrecht zur Richtung $\mathfrak{v}$ geschlagen. Damit es zu einem Zusammenstoß kommt, muß die Richtung von $\mathfrak{v}$ diesen Kreis in einem innerhalb gelegenen Punkt M treffen. Da alle Lagen von M im Kreis gleich wahrscheinlich sind, ist die Zahl der Zusammenstöße, nach welchen das Ion die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}\sin^2\varphi$ in der ursprünglichen Richtung besitzt,

$$2\,r\pi\,dr = 2\,\sigma^2\pi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

proportional. Der gesuchte Mittelwert ist also:

$$\frac{\mathfrak{v}}{\sigma^2\pi}\int^{\frac{\pi}{2}} 2\,\sigma^2\pi\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 2\,\mathfrak{v}\left|\frac{1}{4}\sin^4\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathfrak{v}}{2}$$

Bei gleicher Masse von Ion und Gasmolekel wäre also $\beta = \frac{1}{2}$.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Lassen wir nun die Annahme fallen, daß die Massen gleich sind, und bezeichnen wir die des Ions mit m und die der Molekel mit m_1. Wieder bleibt die Tangentialkomponente $\mathfrak{v} \sin \varphi$ erhalten; dagegen wird die Normalkomponente von $\mathfrak{v} \cos \varphi$ auf den Wert $\mathfrak{v} \cos \varphi \frac{m-m_1}{m+m_1}$ geändert. Das Ion hat also nach dem Zusammenstoß eine Geschwindigkeit in der ursprünglichen Flugrichtung gleich

$$\mathfrak{v} \sin^2 \varphi + \mathfrak{v} \cos^2 \varphi \frac{m-m_1}{m+m_1}$$

Zur Mittelwertbildung multiplizieren wir wieder mit $2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$ und integrieren von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Das gibt

$$2\,\mathfrak{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi + 2\,\mathfrak{v} \frac{m-m_1}{m+m_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\mathfrak{v}}{2} + 2\,\mathfrak{v} \frac{m-m_1}{m+m_1} \left| -\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathfrak{v}}{2} \left[1 + \frac{m-m_1}{m+m_1} \right] = \mathfrak{v} \frac{m}{m+m_1}$$

Es ist also unter den gemachten vereinfachenden Annahmen (Ruhe der Molekel, Ionengeschwindigkeit klein gegenüber der Molekulargeschwindigkeit) der Koeffizient der Persistenz

$$\beta = \frac{m}{m+m_1}.$$

In die Formel für die spezifische Ionengeschwindigkeit u eingesetzt, führt das zur Lenard'schen Formel:

$$u = v \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{m_1} \right] = \varepsilon \frac{\bar{l}}{\bar{c}} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{2m} \right).$$

Nach jeder Kollision sinkt die Ionengeschwindigkeit durchschnittlich auf $\varepsilon \frac{\bar{l}}{\bar{c}} \frac{1}{m_1}$ und steigt bis vor der nächsten auf

$$\varepsilon \frac{\bar{l}}{\bar{c}} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m} \right).$$

Lenard selbst hat l. c. die eingehende Ableitung seiner Formel unterdrückt. Sie findet sich ohne Einführung des Koeffizienten der Persistenz bei H. F. Mayer[1]. Lenard[2] hat die Rechnungen auch noch wesentlich verfeinert, indem er die Geschwindigkeits- und

[1] Ann. d. Phys., *62*, 358 (1920).
[2] Daselbst, *60*, 329 (1919).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Weglängenverteilung sowie die Bewegung der Molekeln in Rechnung zog. Wir können aber für die folgenden Betrachtungen β unbestimmt lassen und beim allgemeinen Ausdruck für u stehenbleiben.

Die Lenard'sche Formel gilt für den stationären Endwert, der theoretisch erst nach einer unendlichen Zahl von Zusammenstößen erreicht wird. Doch ist für $\beta = \frac{1}{2}$ schon zwischen dem neunten und zehnten Zusammenstoß die Geschwindigkeit nur um $1 \cdot 3\,^0/_{00}$ kleiner als dieser Endwert. Praktisch kommt also bei jeder Methode, die die Ionengeschwindigkeit in einem zeitlich konstanten oder quasistationären Feld bestimmt, die Persistenz nur insoweit zur Geltung, als dies die Lenard'sche Formel ausdrückt. Hingegen könnte sie sich noch anders auswirken, wenn es sich um ein Wechselfeld hoher Frequenz und um die Bewegung der Ionen in einem verdünnten Gas handelt. Es soll dies im folgenden untersucht werden.

Wir denken uns zu diesem Zwecke eine Platte, auf der sich etwa photoelektrisch gebildete Ionen befinden, und darüber ein Wechselfeld. Es sollen drei Fälle behandelt werden.

1. Bei dem von Lattey[1] und anderen angewandten Verfahren wird das Feld durch einen rotierenden Kommutator hergestellt. Zunächst werden die Ionen durch ein konstantes Feld von der Platte weggetrieben, dann kommt die Pause des Umschaltens, während der überhaupt kein Feld vorhanden ist und schließlich werden die Ionen durch ein gleich großes, aber entgegengesetzt gerichtetes Feld gerade wieder auf die Platte zurückgebracht. Berücksichtigen wir seine Trägheit, so wird das Ion in beiden Phasen des Feldes eine Periode des Anlaufens und des Auslaufens aufweisen. Ist aber nur die Umschaltepause lang genug — wie das wohl bei jeder mechanischen Vorrichtung der Fall ist —, so kann man leicht einsehen, daß die Wirkungen des Anlaufens und des Auslaufens sich vollständig kompensieren, d. h. daß das Ion im ganzen ebensoweit kommt, als ob es sich während der Dauer des Feldes mit der konstanten Geschwindigkeit u bewegt hätte.

Es sei $\mathfrak{T}$ die Zeit, während welcher das Ion durch das Feld von der Platte weggetrieben wird, und es erleide während dieser Zeit n Zusammenstöße. Die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen sei wieder τ, und es ist $\mathfrak{T} = n\tau$.

Vor dem ersten Zusammenstoß hat das Ion die Geschwindigkeit v, vor dem zweiten die Geschwindigkeit $v\beta + v = v(1+\beta)$ und vor dem n^{ten} die Geschwindigkeit $v(1+\beta+\ldots+\beta^{n-1}) = v\frac{1-\beta^n}{1-\beta}$.

Bis zum ersten Zusammenstoß legt das Ion den Weg $\frac{v}{2}\tau$ zurück,

[1] Proc. R. S., London, *84*, 173 (1910).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zwischen dem ersten und zweiten den Weg $\left(v\beta + \frac{v}{2}\right)\tau$, zwischen dem zweiten und dritten den Weg $\left(v\beta + v\beta^2 + \frac{v}{2}\right)\tau$ und zwischen dem $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} den Weg $\left(v\beta + v\beta^2 + \quad . + v\beta^{n-1} + \frac{v}{2}\right)\tau$. In Summe also den Weg

$$s_1 = v\tau\left\{\frac{n}{2} + (n-1)\beta + (n-2)\beta^2 + \ldots + \beta^{n-1}\right\} =$$

$$= n\tau v\left\{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\beta}{n}\frac{1-\beta^n}{(1-\beta)^2}\right\} = n\tau u - \tau v\beta\frac{1-\beta^n}{(1-\beta)^2}$$

Dazu kommt aber noch der Weg s_2, den das Ion vermöge der nach dem n^{ten} Zusammenstoß behaltenen Geschwindigkeit $v\beta\frac{1-\beta^n}{1-\beta}$ ohne Feld zurücklegt. Man findet hierfür ohneweiters

$$s_2 = \tau v\beta\frac{1-\beta^n}{(1-\beta)^2}$$

und somit

$$s = s_1 + s_2 = n\tau u.$$

Dieses Verfahren zur Bestimmung der Ionengeschwindigkeit ist also auch in extremen Fällen von allen Störungen durch Trägheitseffekte frei.

2. Anders liegen aber die Verhältnisse, wenn die beiden Phasen unmittelbar aneinanderschließen, die Umschaltepause also vollständig fehlt. Ein derartiges hochfrequentes Feld würde nach dem Vorschlage von Bowman[1] durch Überlagerung harmonischer Schwingungen praktisch herzustellen sein. Für diesen Fall kann gezeigt werden, daß das Ion infolge seiner Trägheit trotz vollkommener Symmetrie des Feldes auf die Platte nicht mehr zurückkommt, sondern sich von ihr abhebt und in einer bestimmten Distanz mit verminderter Amplitude frei über der Platte schwingt. Die kleinste und größte Entfernung von der Platte, also auch Amplitude und Schwingungsmittelpunkt, können berechnet werden.

Da die Rechnung nicht schwierig, wohl aber recht umfangreich ist, möge es genügen, das sehr einfache Ergebnis mitzuteilen, zu dem sie führt. Wir betrachten hierbei nur den stationären Zustand, wie er sich nach einer großen Zahl von Schwingungen herstellt.

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\sum = v\tau\beta\frac{1-\beta^n}{(1-\beta)^2(1+\beta^n)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{ln\,(1+\beta^n) - ln\,2}{ln\,\beta},$$

[1] Phys. Rev., *24*, 31 (1924).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so ist die kleinste Entfernung des schwingenden Ions von der Platte

$$\delta = \beta^{\nu} \sum + \left[\frac{\nu}{2} + (\nu-1)\beta + (\nu-2)\beta^2 + . \quad + \beta^{\nu-1}\right] v\tau =$$

$$= v\tau \left\{\beta^{\nu+1} \frac{1-\beta^n}{(1-\beta)^2 (1+\beta^n)} + \frac{\nu}{2} + \frac{\nu\beta}{1-\beta} - \beta \frac{1-\beta^{\nu}}{(1-\beta)^2}\right\} =$$

$$= 2u\tau \left\{\beta^{\nu+1} \frac{1-\beta^n}{(1-\beta)^2 (1+\beta^n)} + \frac{\nu}{2} - \beta \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2}\right\} = \nu u\tau.$$

Analog findet man die größte Entfernung

$$D = (1+\beta^n) \sum + \left[\frac{n}{2} + (n-1)\beta + (n-2)\beta^2 + \quad . + \beta^{n-1}\right] v\tau - \delta =$$

$$= v\tau \left\{\frac{n}{2} + \frac{n\beta}{1-\beta}\right\} - \delta = nu\tau - \delta = (n-\nu) u\tau.$$

Hierbei hat die Größe ν eine einfache Bedeutung. Sie gibt nämlich die Zahl der Zusammenstöße an, die das Ion nach erfolgtem Zeichenwechsel des Feldes noch erleidet, bis es durch die Gegenwirkung des Feldes zum Stillstand kommt.

Der Schwingungsmittelpunkt liegt in der Höhe

$$h = \frac{1}{2}(D+\delta) = \frac{1}{2} nu\tau,$$

die Amplitude hat den Betrag

$$A = D - h = \left(\frac{n}{2} - \nu\right) u\tau.$$

Ist n so groß, daß $\beta^n = 0$ gesetzt werden darf, so wird zwar ν am größten, nämlich gleich $-\frac{ln\,2}{ln\,\beta}$, kann aber gegen n vernachlässigt werden. Bemerkenswert ist, daß der Schwingungsmittelpunkt stets genau so hoch liegt wie bei der Annahme einer konstanten Ionengeschwindigkeit u. Nur die Amplitude ist vermindert; absolut genommen am meisten für $n = \infty$, prozentuell aber um so mehr, je kleiner n ist. Das läßt die folgende Tabelle erkennen, die für einige β und n die zugehörigen Werte von ν enthält.

$\beta = 0{\cdot}95$		$\beta = 0{\cdot}90$		$\beta = 0{\cdot}50$	
n		n	ν	n	ν
20	7·54	10	3·74	5	0·90
40	11·15	20	5·49	10	0·99
∞	13·51	∞	6·58	∞	1·00

Größere Abweichungen sind also nur für schwere Ionen und bei sehr hoher Wechselzahl zu erwarten.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

3. Auch im Sinusfeld, wie es Rutherford selbst angewendet hat, werden Trägheitseffekte auftreten können; denn auch da schließen die beiden Phasen ohne Umschaltepause aneinander. Außerdem entspricht hier der Bewegungszustand des Ions nicht nur beim Anlauf und Auslauf, sondern überhaupt in keinem Augenblick dem gleichzeitig vorhandenem Felde.

Da in diesem Fall die gaskinetische Durchrechnung schwer möglich ist, mag es genügen, das Ergebnis der hydrodynamischen Behandlung mitzuteilen und dem kinetischen Fall anzupassen.

Es sei wieder ε die Ladung des Teilchens und der Scheitelwert des Wechselfeldes gleich Eins. Aus der Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon \sin \omega t - \eta \frac{d x}{d t}$$

oder

$$x'' + \alpha x' = \mathfrak{A} \sin \omega t$$

ergibt sich mit den Nebenbedingungen $t = 0$, $x = 0$ und $t = 0$, $x' = 0$ die Lösung

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{a} \left\{ \frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-a t} - \frac{a}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t - \frac{a^2}{\omega (a^2 + \omega^2)} \cos \omega t \right\},$$

die für den stationären Fall in

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{a \omega} - \left[\frac{\mathfrak{A}}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t + \frac{\mathfrak{A} a}{\omega (a^2 + \omega^2)} \cos \omega t \right] =$$

$$= \frac{\mathfrak{A}}{a \omega} - A \sin (\omega t + \varphi)$$

übergeht.

Hierin ist

$$A = \frac{\mathfrak{A}}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{und} \quad tg \varphi = \frac{a}{\omega}.$$

Das Teilchen schwingt also wieder um eine mittlere Lage

$$h = \frac{\mathfrak{A}}{a \omega} = \frac{\varepsilon}{\eta} \frac{1}{\omega}$$

mit der kleineren Amplitude

$$A = \frac{\mathfrak{A}}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{\varepsilon}{\eta} \frac{1}{\omega \sqrt{1 + \frac{m^2}{\eta^2} \omega^2}}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wäre das Feld konstant gleich Eins, so würde

$$x' = \frac{\varepsilon}{\eta}\left(1 - e^{-\frac{\eta}{m}t}\right)$$

die Geschwindigkeit des Teilchens nach der Zeit t geben. Es ist also auch die spezifische Ionengeschwindigkeit $u = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

Den Koeffizienten der Persistenz β können wir auf die folgende Weise einführen:

Ist z die Zahl der molekularen Zusammenstöße, die das Teilchen in der Zeit t erleidet, also auch $t = z\tau$, so hat es während dieser z Zusammenstöße die Geschwindigkeit

$$u\left(1 - e^{-\frac{\eta}{m}\tau z}\right)$$

erreicht. Nach der gaskinetischen Rechnung ist anderseits diese Geschwindigkeit vor dem z^{ten} Zusammenstoß gleich $v\frac{1-\beta^z}{1-\beta}$ und nach dem z^{ten} Zusammenstoß gleich $v\beta\frac{1-\beta^z}{1-\beta}$, im Mittel also gleich

$$\frac{v}{2}\,\frac{1+\beta}{1-\beta}(1-\beta^z) = u(1-\beta^z).$$

Setzen wir somit $\beta = e^{-\frac{\eta}{m}\tau}$ oder $\frac{m}{\eta} = -\frac{\tau}{ln\,\beta}$, so können wir von der hydrodynamischen zur gaskinetischen Schreibweise übergehen und erhalten mit für schwere Ionen jedenfalls genügender Annäherung[1]

$$h = \frac{u}{\omega} = \frac{1}{\pi}u\tau n,$$

$$A = \frac{1}{\pi}u\tau n\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{n\,ln\,\beta}\right)^2}}$$

und

$$D = h + A = \frac{1}{\pi}u\tau n\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{n\,ln\,\beta}\right)^2}}\right\}.$$

---

[1] Führt man die hydrodynamische Rechnung auch für das Rechteckfeld durch, indem man sich dieses durch Überlagerung einer unendlichen Anzahl entsprechender harmonischer Schwingungen entstanden denkt, so kommt man mit dem obigen Wert von β zu genau den gleichen Ausdrücken, wie wir sie früher auf gaskinetischem Wege abgeleitet haben.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Hierin ist n wieder die Zahl der Zusammenstöße während einer Halbperiode, d. h. in der Zeit $\frac{1}{2}T$.

Nach Rutherford ist ohne weitere Berücksichtigung der Persistenz

$$D = \frac{2u}{\omega} = \frac{2}{\pi} u \tau n$$

Die folgende Zusammenstellung gibt für einige Werte von β und n die Abweichungen des in der Formel für D enthaltenen Klammerausdruckes von der Zwei. Der Schwingungsmittelpunkt liegt wieder ebenso hoch wie nach der einfachen Rechnung. Nur die Amplitude ist vermindert, und zwar weit mehr als im Falle des Rechteckfeldes.

$\beta = 0 \cdot 95$		$\beta = 0 \cdot 90$	
	statt 2		statt 2
0	1·000	0	1·000
20	1·140	20	1·280
50	1·334	50	1·589
100	1·579	100	1·824
200	1·817	200	1·946
500	1·964	500	1·991
∞	2·000	∞	2·000

Grundsätzlich ließe sich durch Messung zweier Maximaldistanzen bei demselben Gasdruck aber verschiedener Frequenz $\frac{\tau}{ln\,\beta}$ finden. Praktisch ist das aber kaum möglich. Wohl ist es leicht, bei mäßiger Verdünnung des Gases, ein Feld von so hoher Frequenz herzustellen, daß die Zahl der Zusammenstöße des Ions während einer Halbperiode < 100 wird. Um aber D auf einen makroskopisch meßbaren Betrag zu bringen, müßte gleichzeitig die Feldgeschwindigkeit des Ions so hoch getrieben werden, daß Stoßionisation eintritt. Das Ergebnis unserer Berechnungen läßt sich also dahin zusammenfassen, daß im hochfrequenten Wechselfeld ein Trägheitseffekt des Ions zwar existiert, aber der makroskopischen Messung nicht zugänglich ist.

II. Teil.

Über die Aufladung im Wechselfeldkondensator.

Ist Φ der Scheitelwert des Sinusfeldes von der Frequenz ω und D wieder die Maximaldistanz, bis zu der die Ionen kommen, wo also die zweite, mit dem Elektrometer verbundene Platte eben

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

keine Aufladung zeigt, so ist $u = \frac{\omega D^2}{2\Phi}$ die von Rutherford gegebene Formel zur Berechnung der spezifischen Ionengeschwindigkeit. Ihre Anwendung setzt voraus, daß diese Maximaldistanz D, bei der keine Aufladung eintritt, mit aller Schärfe eingestellt werden kann. Praktisch ist das kaum möglich. Man mißt vielmehr den Strom bei einigen Distanzen $d < D$, trägt die Stromwerte in der Ordinate, die Distanzen in der Abszisse auf und ermittelt den Schnittpunkt durch graphische Extrapolation. Man kann dieses Verfahren durch ein genaueres ersetzen, wenn es gelingt, den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Distanz in seiner funktionalen Abhängigkeit darzustellen.

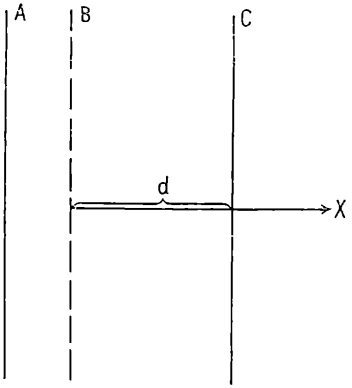

Fig.

1. Bei der durch Franck modifizierten Wechselfeldmethode werden durch eine konstante, zwischen A und B angelegte niedrige Spannung die Ionen des einen Zeichens durch das Netz B in den Meßkondensator $B\ C$ getrieben. Darf man von der Störung durch die im Kondensator nicht abgefangenen, also in die Kammer $A\ B$ zurückflutenden Ionen absehen, was bei starker Ionisation wohl erlaubt ist, so gelangt, solange das Wechselfeld die entsprechende Richtung hat, ein konstanter Strom von z Ionen eines Vorzeichens in den Kondensator.

Jedes Ion bewegt sich zwischen B und C zur Zeit t mit der Geschwindigkeit $u \frac{\Phi}{d} \sin \omega t$.

Wir wollen nun die Ionen ins Auge fassen, die gerade am Ende der Halbperiode, also im Moment, wo das Wechselfeld seine Richtung umkehrt, die Platte C erreichen. Bezeichnen wir den Zeitpunkt, in dem diese Ionen durch das Netz B in den Kondensator eingetreten sind, mit t', so können wir diesen Zeitpunkt aus der Bemerkung berechnen, daß die Zeit von t' bis $\frac{1}{2} T$ gerade genügen mußte, um die Ionen in der X-Richtung über die Strecke d zu treiben. Schreibt man zur Abkürzung $u \frac{\Phi}{d} = P$, so folgt aus

$$d = P \int_{t'}^{\frac{1}{2}T} \sin \omega t \, dt = \frac{P}{\omega} + \frac{P}{\omega} \cos \omega t'$$

$$t' = \frac{1}{\omega} \arccos \left[\frac{\omega d}{P} - 1 \right].$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Alle Ionen, die in der Zeit 0 bis t' in den Kondensator gelangt sind, werden die Platte C erreichen und an sie ihre Ladung abgeben; alle Ionen hingegen, die zwischen t' und $\frac{1}{2}T$ in den Kondensator gelangen, werden, noch ehe sie C erreichen, durch den eintretenden Zeichenwechsel des Feldes wieder in die Vorkammer AB zurückgetrieben. In dieser folgenden Halbperiode gelangen überhaupt keine Ionen in den Kondensator.

Unter Annahme konstanter Ionenzufuhr ist also die Zahl der Ionen, die während einer ganzen Periode T die Platte C erreichen,

$$\mathfrak{Z} = \frac{z}{\omega} \arccos\left[\frac{\omega d}{P} - 1\right]$$

und die Zahl pro Sekunde

$$Z = \frac{z}{2\pi} \arccos\left[\frac{\omega d}{P} - 1\right],$$

woraus man durch Multiplikation mit ε den Strom erhält.

Wählt man die Distanz $d = D$, d. h. so groß, daß $Z = 0$ wird, so erhält man aus

$$\frac{\omega D}{P} - 1 = \frac{\omega D^2}{u\Phi} - 1 = 1$$

$u = \frac{\omega D^2}{2\Phi}$ also die von Rutherford gegebene Formel.

Differenziert man Z nach d, so wird der Differentialquotient für $d^2 = D^2 = \frac{2u\Phi}{\omega}$ gleich ∞ und für $d = 0$ gleich $-\frac{z}{2} \frac{1}{\frac{\pi}{2}D}$

Da für $d = 0$ die Zahl der in der Sekunde dort passierenden Ionen $Z = \frac{z}{2}$ ist, so heißt das, daß die für $d = 0$ gezogene Tangente die Abszisse bei $\frac{\pi}{2}D$ trifft.

Nur für kleine Werte von d verläuft Z nahezu geradlinig; je mehr sich d dem D nähert, desto mehr krümmt sich die Kurve gegen die Abszissenachse und steht für $d = D$ auf ihr sogar senkrecht. Wird bei der Extrapolation dieser letzte Abfall nicht berücksichtigt, so besteht die Gefahr, daß D und somit auch u zu groß bestimmt werden.

Die folgende Tabelle und Zeichnung gibt für einen konkreten Fall den Verlauf der Kurve $\mathfrak{Z} = f(d)$:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\begin{cases} z = 100000 \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1000 \\ u = 1 \dfrac{cm}{\sec} \Big/ \dfrac{\text{Volt}}{cm} \\ \Phi = 10000 \text{ Volt} \end{cases}$$

d cm	$\mathfrak{Z}$
0	314
1	269
2	222
3	168
4	93
4·47	0

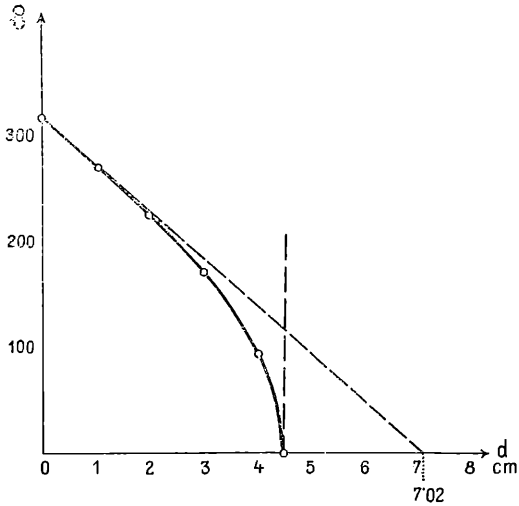

Fig. 3.

2. Sind in der Kammer AB überhaupt nur Ionen eines Zeichens vorhanden (Spitzenentladung), so kann die Hilfsspannung entbehrt werden. Von der Diffusion abgesehen, wird, wenigstens bei grobmaschigem Gitter, die Zahl der in den Kondensator gezogenen Ionen dem durch das Gitter hindurchgreifenden Feld proportional sein. Setzen wir also hier

$$z = \zeta \frac{\Phi}{d} \sin \omega t,$$

so ist die Zahl der Ionen, die in der Halbperiode auf die Platte C gelangen,

$$\mathfrak{Z} = \int_0^{t'} \zeta \frac{\Phi}{d} \sin \omega t \, dt = \left| -\frac{\zeta \Phi}{\omega d} \cos \omega t \right|_0^{t'} = -\frac{\zeta \Phi}{\omega d} \left[\frac{\omega d}{P} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{\zeta \Phi}{\omega d} = \frac{2 \zeta \Phi}{\omega d} - \frac{\zeta \Phi}{P} = \frac{2 \zeta \Phi}{\omega d} - \frac{\zeta d}{u}.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{\omega}{2\pi}$ erhält man $Z = \frac{\zeta \Phi}{\pi d} - \frac{\zeta d \omega}{2 \pi u}$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Auch dieser Ausdruck wird Null, wenn $d^2 = D^2 = \frac{2\,u\Phi}{\omega}$ ist. Differenziert man nach d, so hat der Differentialquotient für $d = D$ den Wert $-\frac{\zeta\omega}{\pi u}$ und für $d = 0$ den Wert ∞. Die Kurve ist also eine ganz andere. Ihre Krümmung ist die entgegengesetzte als im früheren Fall, und die Extrapolation kann auf Werte von u führen, die zu klein sind. Die folgende Figur und Tabelle bringt das wieder zur Darstellung.

$$\left\{\begin{aligned} \zeta &= 100 \\ \omega = \frac{2\pi}{T} &= 1000 \\ u &= 1\ \frac{cm}{\sec}\ \frac{\text{Volt}}{cm} \\ \Phi &= 10000\ \text{Volt} \end{aligned}\right.$$

d cm	$\mathfrak{Z}$
0	∞
1	1900
2	800
3	366
4	100
4·47	0

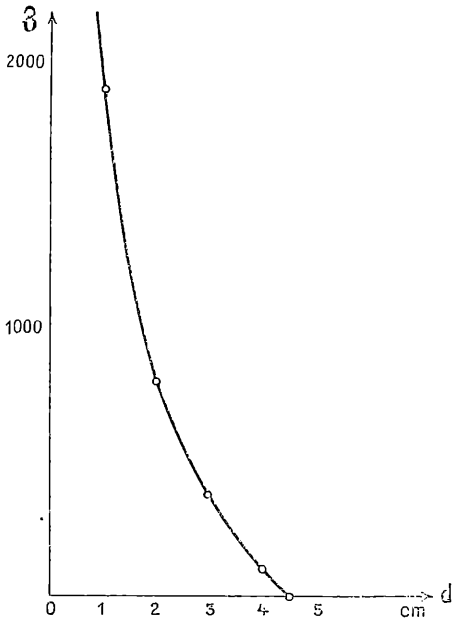

Fig. 4.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: 137_2a

Autor(en)/Author(s): Mache Heinrich

Artikel/Article: Über RutherfordÂ's Wechselfeldmethode zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Gasionen. 607-619