Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes

Von

Theodor Schmid

Korr. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Mit 17 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Oktober 1928)

1. In dem Bestreben, die »darstellende Geometrie« auf den vierdimensionalen Raum auszudehnen, kann man nach E. Müller[1] ein axiales Sehbündel voraussetzen, welches aus den ∞^2 Sehebenen und ∞^2 Sehüberebenen besteht, die durch eine Gerade a gehen. Jeder Punkt P des R_4 ergibt dann eine Verbindungsebene, welche eine Bildebene α in einem Punkte P_0' schneidet, und jede Gerade g ergibt eine Verbindungsüberebene, welche α in einer

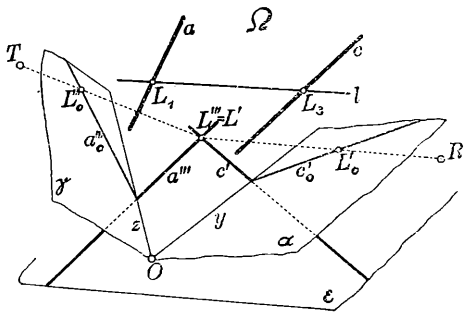

Fig. 1.

Geraden g_0' schneidet. Um eine eindeutige Abbildung des Punktraumes R_4 zu erhalten, wählt man ein zweites axiales Sehbündel c und projiziert auf eine zweite Bildebene γ, die mit α einen Punkt O gemeinsam hat. Dabei ergeben sich die Projektionen P_0''' und g_0''' Wählt man nun auf α eine durch O gehende Gerade y und auf γ eine durch O gehende Gerade z, dann die Verbindungsebene von y und als eigentliche Bildebene ε, so kann man $\alpha\,(P_0', g_0')$ aus einem Punkt R der Verbindungsüberebene $[\alpha\varepsilon]$ auf $\varepsilon\,(P', g')$, ferner $\gamma\,(P_0''', g_0''')$ aus einem Punkt T der Verbindungsüberebene $[\gamma\,\varepsilon]$ auf $\varepsilon\,(P''', g''')$ projizieren (Fig. 1). Die auf ε entstehenden Bilder mögen als Grundriß und Kreuzriß bezeichnet werden. Damit ist wirklich eine eindeutige Abbildung der

[1] Jahresbericht d. D. Math. Ver., 14. Bd. (1905).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Punkte P des vierdimensionalen Raumes R_4 auf die Punktepaare P', P''' der Bildebene ε erreicht; denn jedes Punktepaar P', P''' von ε bestimmt auch einen Punkt P von R_4. Nämlich P' wird zunächst aus R auf α nach P'_0, ferner P''' aus T auf γ nach P'''_0 übertragen. Die Verbindungsebenen von P'_0 mit a und von P'''_0 mit c ergeben dann einen Schnittpunkt P. Ein Geradenpaar g', g''' von ε ist zur Bestimmung der Geraden g nicht hinreichend; denn die Übertragungen g'_0, g'''_0 bestimmen mit a, beziehungsweise c zwei Überebenen, welche eine Schnittebene σ gemeinsam haben, und alle ∞^2 Geraden dieser Ebene haben g' als Grundriß und g''' als Kreuzriß. Es gibt nämlich ∞^4 Geradenpaare auf der Ebene ε, aber ∞^6 Geraden im R_4.

2. Die beiden Geraden a und c bestimmen eine Überebene Ω. Diese schneidet α in einer Geraden c'_0 und ergibt auf ε eine Gerade c', den Grundriß von c; anderseits schneidet Ω die Ebene γ in einer Geraden a'''_0 und ergibt auf ε eine Gerade a''', den Kreuzriß von a. Die Geraden c' und a''' sollen »die Kerngeraden« der Abbildung genannt werden.[1]

Ein Punkt Q von Ω bestimmt mit a eine Ebene, welche c in einem Punkte Q_3 und α in Q'_0 schneidet. Alle Punkte der Ebene $[a\,Q]$ haben dann denselben Punkt Q' von c' als Grundriß. Ebenso bestimmt Q mit c eine Ebene, welche a in einem Punkte Q_1 und γ in Q'''_0 schneidet. Alle Punkte der Ebene $[c\,Q]$ haben denselben Punkt Q''' von a''' als Kreuzriß. Die Verbindungsgeraden $Q_1\,Q_3 = q$ bilden das Strahlnetz mit den Achsen a und c. Die ∞^3 Punkte der Überebene Ω sind durch die ∞^2 Punktpaare von c' und a''' abgebildet, nämlich alle ∞^1 Punkte eines Netzstrahles q sind durch ein und dasselbe Punktpaar Q', Q''' der Kerngeraden c', a''' abgebildet. Für die Punkte von a ist der Grundriß unbestimmt und für die Punkte von c der Kreuzriß. Die Abbildung des Punktraumes R_4 ist also nicht ausnahmslos eindeutig. Die ∞^1 Geraden von Ω haben c' als Grundriß und a''' als Kreuzriß. Für eine Gerade des Strahlgebüsches a kann jede durch einen bestimmten Punkt von c' gehende Gerade als Grundriß betrachtet werden; ebenso kann für eine Gerade des Gebüsches c jede durch einen bestimmten Punkt von a''' gehende Gerade als Kreuzriß betrachtet werden.

Die Punkte einer beliebigen Geraden g sind durch zwei projektive Punktreihen auf g' und g''' abgebildet. Dabei ist die Projektivität schon durch zwei Punktpaare bestimmt. Der Schnittpunkt Q' von g' mit c' und der Schnittpunkt Q''' von g''' mit a''' ergeben nämlich als Abbildung des

---

[1] Sie sind das Analogon zu den »Kernpunkten« bei der Abbildung des Punktraumes R_3 aus einem Punkt A auf eine Ebene α und aus C auf γ, sodann Übertragung von α aus einem neuen Punkt R und von γ aus T auf eine Bildebene ε.

G. Hauck, Journal f. r. u. ang. Mathematik, 95. Bd. (1883).

Th. Schmid, Monatshefte f. Math. u. Physik, 4. Jg. (1893).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Schnittpunktes Q von g mit der Überebene Ω ein drittes Punktpaar.

Die Punkte einer Ebene φ sind durch zwei kollineare Punktfelder φ' und φ''' abgebildet. Dabei ist die Kollineation schon durch drei gegebene Punktpaare bestimmt. Die Kerngeraden c' und a''' bilden nämlich ein Paar entsprechender Geraden als Abbildung der Schnittgeraden von φ mit der Überebene Ω.

3. Für die besprochene Abbildung des Punktraumes R_4 auf die Ebene ε soll nun die Koinzidenzaufgabe[1] behandelt werden, d. h. man fragt nach den Punkten K des R_4, für welche der Grundriß K' mit dem Kreuzriß K''' koinzidiert. Da man jeden Punkt der Bildebene ε als ein Punktpaar $K' = K'''$ betrachten kann, hat man sich ε als zwei sich deckende Punktfelder (eine Identität) zu denken. Dabei kann man auch jede Gerade von ε als Grundriß k' und Kreuzriß k''' betrachten, nur gehören zu einem solchen Geradenpaare $k' = k'''$ alle ∞^2 Geraden einer Ebene σ, welche Ω in einem Netzstrahle $Q_1 Q_3 = q$ schneidet, der durch die Schnittpunkte Q', Q''' von $k' = k'''$ mit den Kerngeraden c', a''' abgebildet ist.

Werden nun die Punkte K_0' und Geraden k_0' der Ebene α aus a projiziert, ferner die Punkte K_0''' und Geraden k_0''' der Ebene γ aus c projiziert, so erhält man zwei kollineare axiale Bündel. Diese erzeugen zunächst durch die Schnittpunkte K der ∞^2 entsprechenden Ebenen eine zweidimensionale Fläche dritter Ordnung[2] des R_4 — die Koinzidenzfläche $\varkappa^3$ der Abbildung. Eine beliebige Ebene φ schneidet nämlich die kollinearen axialen Bündel in kollinearen Feldern, deren drei Doppelpunkte die Schnittpunkte der Ebene φ mit der Koinzidenzfläche $\varkappa^3$ sind.

Der Schnittpunkt der Kerngeraden e' und a''' kann als ein auf ihnen liegendes Punktpaar $L' = L'''$ betrachtet werden. Zu diesem Punktpaar gehört ein Netzstrahl $L_1 L_3 = l$. Diese Gerade l muß auf der Koinzidenzfläche liegen. Jede durch den Punkt $L' = L'''$ gehende Gerade kann man als $e' = e'''$ betrachten. Dann bestimmen e_0' mit a und e_0''' mit c zwei entsprechende Überebenen, deren Schnittebene σ durch l geht. Beschreibt $K' = K'''$ die Punktreihe auf $e' = e'''$, so ergeben sich in den Bündeln a und c zwei projektive Ebenenbüschel, welche die Schnittebene σ in projektiven Strahlbüscheln L_1 und L_3 schneiden. Diese haben l als selbstentsprechenden Strahl und erzeugen eine Perspektivachse e, deren Punkte der Koinzidenzfläche $\varkappa^3$ angehören. Aus den ∞^1 Strahlen des Büschels $L' = L'''$ erhält man ∞^1 Erzeugende e, welche l in je einem Punkte E schneiden. Zu ihnen gehört auch a und c.

---

[1] Th. Schmid, Über das Koinzidenzproblem. Monatshefte f. Math. u. Phys., IV. Jg. (1893), VI. Jg. (1895).

[2] G. Veronese, Behandlung der projektiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens. Mathem. Annalen, 19. Bd. (1882), p. 230.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Koinzidenzfläche $\varkappa^3$ der Abbildung des R_4 ist eine Regelfläche dritter Ordnung, welche l als Leitgerade besitzt.[1]

Beschreibt der Punkt $K' = K'''$ eine beliebige Gerade $k' = k'''$ der Bildebene ε, so erhält man daraus zwei Überebenen mit ihrer Schnittebene σ, die durch den Netzstrahl $Q_1 Q_3 = q$ geht, ferner zwei projektive Ebenenbüschel a, c, welche die Ebene σ in den projektiven Strahlbüscheln Q_1, Q_3 schneiden und daher einen auf σ liegenden Kegelschnitt k^2 erzeugen, der durch die Punkte Q_1 und Q_3 geht und welcher der Koinzidenzfläche angehört. Die Geraden einer Ebene σ schneiden $\varkappa^3$ in zwei Punkten; deshalb heißen die Ebenen σ Bisekantenebenen. Die Bilder der Geraden einer solchen Ebene σ sind in $k' = k'''$ koinzident.

Die kollinearen axialen Bündel a und c erzeugen außer den ∞^2 Punkten K der Koinzidenzfläche $\varkappa^3$ noch die ∞^2 Bisekantenebenen σ, welche $\varkappa^3$ nach Kegelschnitten k^2 schneiden.

Ein Punktpaar P', P''' bestimmt eine Verbindungsgerade $k' = k'''$; aber wenn P' mit P''' in einem Punkt $K' = K'''$ zusammenfällt, gibt es ∞^1 Verbindungsgerade. Daraus folgt:

Durch einen Punkt P geht nur eine Bisekantenebene σ; aber durch einen Punkt K von $\varkappa^3$ gehen ∞^1 Bisekantenebenen.

Eine Überebene Π schneidet die kollinearen axialen Bündel a und c in zwei kollinearen Strahlen- und Ebenenbündeln, deren Scheitel die Schnittpunkte Q_1, Q_3 von Π mit den Achsen a, c sind. Die Schnittlinie der Überebene Π mit der Koinzidenzfläche $\varkappa^3$ ist das Erzeugnis der beiden Bündel Q_1, Q_3, also eine überebene Linie (Raumkurve) dritter Ordnung k^3, welche durch die Punkte Q_1 und Q_3 geht und auch l in einem Punkte E trifft. Die Überebenen Π und Ω ergeben nämlich eine Schnittebene φ, welche durch den Netzstrahl q geht und die Leitgerade l in einem Punkt E schneidet, welcher der Schnittlinie angehören muß. Die ∞^4 Überebenen Π ergeben ∞^4 überebene Linien 3. Ordnung k^3 auf $\varkappa^3$. Werden die Punkte K einer überebenen Linie k^3 aus der Bisekante $Q_1 Q_3 = q$ projiziert, so erhält man ein Ebenenbüschel, welches auf ε als zwei projektive Strahlbüschel Q' und Q''' erscheint, nämlich jede Ebene als solche Strahlen von Q' und Q''', welche sich im Bilde $K' = K'''$ des betreffenden Punktes K schneiden. Diese zwei projektiven Strahlbüschel erzeugen als Bild von k^3 einen Kegelschnitt $k^{3\prime} = k^{3\prime\prime\prime}$,

---

[1] Nimmt man auf der Bildebene ε statt der Identität eine beliebige Kollineation an, so entspricht ihr im allgemeinen eine analoge Regelfläche dritter Ordnung. Ihre Leitgerade l ergibt sich aus dem einzigen Punktpaar L', L''', welches auf den gegebeben Kerngeraden c', a''' liegt. Dieses findet man, indem man zu c' die entsprechende Gerade in der Kollineation sucht, die dann a''' in L''' schneidet. Nur wenn c' und a''' entsprechende Gerade der Kollineation sind, gehört zu dieser eine Ebene φ.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der durch Q', Q''' und auch durch den Punkt $L' = L'''$ geht (Fig. 2). Die ∞^4 überebenen Linien k^3 sind also abgebildet durch die ∞^4 Kegelschnitte, welche durch den Punkt $L' = L'''$ gehen.

Die Punkte einer Überebene Π sind abgebildet durch die Punktpaare P', P''', welche auf entsprechenden Strahlen der projektiven Büschel Q', Q''' liegen, die sich in je einem Punkte des Kegelschnittes $k^{3\prime} = k^{3\prime\prime\prime}$ schneiden, der das Bild der Koinzidenzlinie k^3 der Überebene Π ist.[1]

Eine der ∞^1 Überebenen, welche durch eine Bisekantenebene σ gehen, schneidet die axialen Bündel in kollinearen Bündeln Q_1, Q_3, welche σ als selbstentsprechende Ebene besitzen. Das Erzeugnis k^3 zerfällt daher in den Kegelschnitt k^2 auf σ und in eine Erzeugende e; in der Abbildung zerfällt der Kegelschnitt $k^{3\prime}$ in eine Gerade $k' = k'''$ und eine Gerade $e' = e'''$ (durch $L' = L'''$).

Eine der ∞^2 Überebenen, welche durch die Leitgerade l gehen, schneidet die axialen Bündel in kollinearen

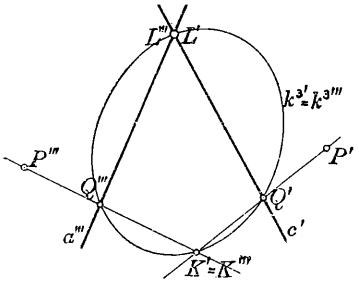

Fig. 2.

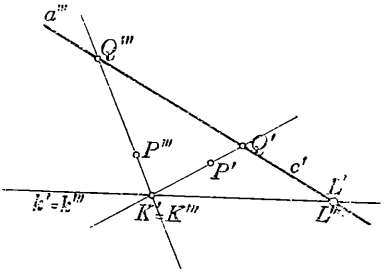

Fig. 3.

Bündeln L_1, L_3, welche l als selbstentsprechenden Strahl haben. Das Erzeugnis k^3 zerfällt also in die Gerade l und zwei Erzeugende e; in der Abbildung zerfällt der Kegelschnitt $k^{3\prime}$ in zwei durch $L' = L'''$ gehende Gerade $e' = e'''$. Für die Überebene Ω zerfällt k^3 in l und die beiden Geraden a, c selbst.

Für die ∞^2 Ebenen τ, welche durch eine Erzeugende e gehen, ergibt sich in der Abbildung eine perspektive Kollineation mit $e' = e'''$ als Kollineationsachse.

4. In dem besonderen Falle, wo die Kerngeraden c' und a''' zusammenfallen, ist die Überebene $\Omega = [ac]$ eine selbstentsprechende für die kollinearen axialen Bündel a und c. In Ω selbst liegen jetzt zwei entsprechende projektive Ebenenbüschel a und c. Diese erzeugen ein einschaliges Hyperboloid $\varkappa^2$, dessen Erzeugende l (Strahlen des Netzes $[a, c]$) als koinzidente Punktpaare $L' = L'''$ von $c' = a'''$ erscheinen. Die Koinzidenz-

[1] Sind außer den Kerngeraden noch vier Punktpaare gegeben, so ist die Aufgabe, die zur Abbildung der durch die vier Punkte bestimmten Überebene gehörigen Kernpunkte und den Koinzidenzkegelschnitt zu finden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

fläche $\varkappa^3$ zerfällt hier in das Koinzidenzhyperboloid $\varkappa^2$ und in eine Koinzidenzebene[1] $\varkappa$, welche mit dem Hyperboloid eine Erzeugende $e_\varkappa$ des zweiten Systems gemeinsam hat und auch durch den Punkt O geht.

Hier läßt die Abbildung noch eine andere Deutung zu. Für einen beliebigen Punkt P des R_4 hat die Sehebene $[a\,P]$ mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ einen Punkt $P_{\varkappa_1}$ gemein, der seinen Grundriß auch in P' hat. Da aber $P_{\varkappa_1}$ auf der Koinzidenzebene liegt, so ist P' auch der Kreuzriß von $P_{\varkappa_1}$. Man erhält also dieselbe Abbildung, wenn man die Punkte P aus a auf die Koinzidenzebene $\varkappa$ nach $P_{\varkappa_1}$ projiziert, dann das Punktpaar $P, P_{\varkappa_1}$ aus c auf γ projiziert und schließlich wieder aus T auf ε. Ebenso

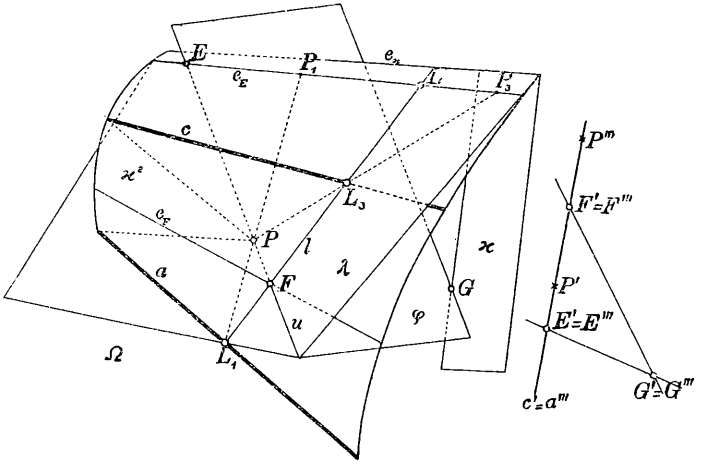

Fig. 4.

hat die Sehebene $[c\,P]$ mit $\varkappa$ einen Punkt $P_{\varkappa_3}$ gemein, für welchen der Kreuzriß und auch der Grundriß in P''' liegt, so daß die ganze Abbildung als Grundriß der Punktpaare $P, P_{\varkappa_3}$ betrachtet werden kann.

Eine beliebige Überebene Π schneidet die axialen Bündel a, c in kollinearen Bündeln Q_1, Q_3, welche die Schnittebene σ von Π und Ω als selbstentsprechende Ebene besitzen. Das Erzeugnis zerfällt in den Kegelschnitt k^2, nach welchem σ das Hyperboloid $\varkappa^2$ schneidet, und in eine Gerade k, welche Π mit der Koinzidenzebene gemein hat. Der Kegelschnitt k^2 und die Gerade k haben einen gemeinsamen Punkt auf $e_\varkappa$. Durch diesen geht ein Netzstrahl l, der im Schnittpunkt $L' = L'''$ von $k' = k'''$ mit $c' = a'''$ (dem Bild von k^2) abgebildet ist. Für die Abbildung von Π sind hier die Büschel Q' und Q''' perspektiv mit der Geraden $k' = k'''$ als Perspektivachse (Fig. 3).

---

[1] L. Hofmann [Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, 130. Bd. (1921), p. 175] ist schon bei dem von ihm betrachteten besonderen Fall der Abbildung des R_4 auf das Vorhandensein einer Koinzidenzebene gekommen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Eine beliebige Ebene φ schneidet das Hyperboloid $\varkappa^2$ in den zwei Punkten E, F, welche auf der Schnittgeraden u von φ und Ω liegen. In der Abbildung erscheinen diese als Punkte $E' = E'''$ und $F' = F'''$ auf der Kerngeraden $c' = a'''$. Anderseits schneidet φ die Koinzidenzebene $\varkappa$ in einem Punkte G, dessen Abbildung $G' = G'''$ der dritte Doppelpunkt der Kollineation ist, durch welche die Ebene φ abgebildet ist (Fig. 4). Auf der Kerngeraden $c' = a'''$ liegen die Bilder $E' = E'''$ und $F' = F'''$ der Punkte E, F. Die ganze Punktreihe $u(P)$ ergibt daher auf der Kerngeraden zwei projektive Punktreihen $u'(P')$ und $u'''(P''')$ mit einer Charakteristik $\delta = (E' F' P' P''')$.

Legt man durch E, F die Erzeugenden e_E und e_F der Regelschar von $\varkappa^2$, welcher die Sehachsen a und c angehören, und durch F auch die Erzeugende l der zweiten Schar, so schneidet l die Erzeugende a in L_1, c in L_3 und e_E in L. Projiziert man die Reihe $u(P)$ aus L_1 und L_3 auf die Erzeugende e_E, so erhält man die projektiven Punktreihen $u_1(P_1)$ und $u_3(P_3)$ mit E und L als Doppelpunkten. Dabei liegt P_1 auf der Sehebene $[a P]$ und P_3 auf $[c P]$, also ist P' auch der Grundriß von P_1 und P''' der Kreuzriß von P_3. Da aber P_3 ein Punkt von $\varkappa^2$ ist, so ist P''' auch zugleich der Grundriß von P_3. Die Charakteristik $\delta = (E' F' P' P''')$ ist deshalb gleich der Charakteristik $\delta = (E L P_1 P_3)$. Projiziert man die Reihen von e_E aus P auf l, so erhält man

$$\delta = (F L L_1 L_3) = (e_F e_E a c).$$

Also

$$\delta = (E' F' P' P''') = (a c e_F e_E).$$

Die ∞^6 Ebenen φ des R_4 sind hier durch die »Gruppe der ∞^6 Kollineationen« abgebildet, welche die Kerngerade $c' = a'''$ als Doppelgerade besitzen, und zwar ist die Charakteristik dieser Doppelgeraden gleich der Charakteristik der Erzeugenden e_F und e_E in bezug auf die Sehachsen a und c.

Wenn die Ebene φ mit der Überebene Ω eine Schnittgerade u ergibt, welche die dem Hyperboloid $\varkappa^2$ und der Ebene $\varkappa$ gemeinsame Erzeugende $e_\varkappa$ in einem Punkte $E_\varkappa$ schneidet, so ist durch u und $\varkappa$ eine Überebene $[u \varkappa]$ bestimmt. In Ω gibt es ∞^3 Gerade u, welche $e_\varkappa$ in einem Punkte schneiden — ein Strahlgebüsch. Durch jede Gerade u gehen ∞^2 Ebenen, von welchen aber nur ∞^1 in der Überebene $[u \varkappa]$ liegen und die Ebene $\varkappa$ in einer Geraden k schneiden. In diesem Falle (Fig. 5) ergibt sich für die Abbildung von φ eine Reihe von selbstentsprechenden Punkten auf $k' = k'''$ Der zweite Schnittpunkt F von u mit $\varkappa^2$ liefert noch einen selbstentsprechenden Punkt $F' = F'''$ auf der Kerngeraden $c' = a'''$, und die Kollineation wird eine perspektive. Dreht man eine solche Ebene um u aus der Überebene $[u \varkappa]$ heraus, so hat sie mit $\varkappa$ nur mehr einen Punkt G gemein, welcher mit $E_\varkappa$ zusammenfällt; in der Abbildung hat die Kollineation außer den Doppelpunkten $E' = E'''$, $F' = F'''$ noch einen Doppelpunkt $G' = G'''$, der dem

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Doppelpunkt $E' = E'''$ auf einer durch ihn gehenden Geraden benachbart liegt. In diesem Falle ist die Charakteristik der Kerngeraden $c' = a'''$, also die Charakteristik der ganzen perspektiven Kollineation im vorangehenden Fall

$$\delta = (E'_\varkappa F' P' P''') = (a\, c\, e_F\, e_\varkappa).$$

Die ∞^4 Ebenen φ des R_4, deren Schnittgerade u mit Ω die Erzeugende $e_\varkappa$ in einem Punkte $E_\varkappa$ schneidet und welche die Koinzidenzebene $\varkappa$ in einer Geraden k treffen, erscheinen in der Abbildung als perspektive Kollineationen mit $k' = k'''$ als Kollineationsachse, mit $F' = F'''$ als Kollineationszentrum und mit der Charakteristik $\delta = (a\, c\, e_F\, e_\varkappa)$.

Geht die Ebene φ durch eine Erzeugende e des zweiten Systems des Koinzidenzhyperboloides $\varkappa^2$, so er-

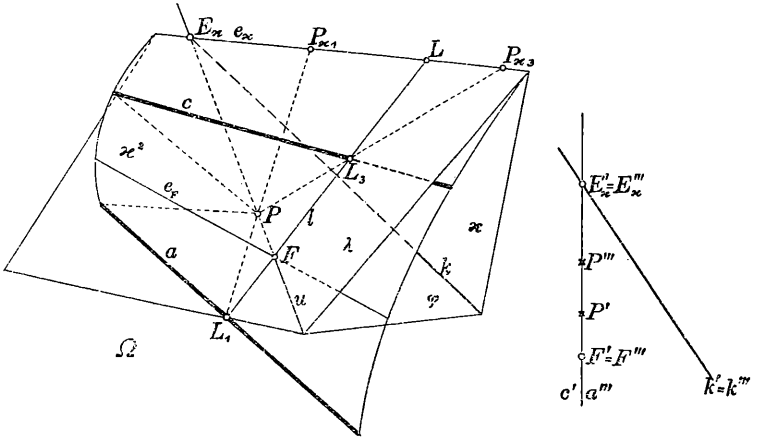

Fig. 5.

geben die Schnittpunkte von e mit den Erzeugenden l für die Abbildung von φ eine Reihe von selbstentsprechenden Punkten auf der Kerngeraden $c' = a'''$. Der Schnittpunkt K von φ mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ gibt einen weiteren selbstentsprechenden Punkt $K' = K'''$. Man erhält also wieder eine perspektive Kollineation. Die Verbindungsgerade eines beliebigen Punktes P der Ebene φ mit K trifft e in einem Punkte E (Fig. 6), durch welchen eine Erzeugende l des andern Systems von $\varkappa^2$ geht. Diese schneidet $e_\varkappa$ in $E_\varkappa$, ferner a in L_1 und c in L_3. Die Ebene $\lambda = [Kl]$ schneidet die Koinzidenzebene $\varkappa$ in der Geraden $E_\varkappa K$, ferner die Sehebene $[a\,P]$ in $L_1 P$ und die Sehebene $[c\,P]$ in $L_3 P$. Die Gerade $E_\varkappa K$ wird dann von $L_1 P$ in $P_{\varkappa 1}$ und von $L_3 P$ in $P_{\varkappa 3}$ geschnitten, so daß $P_{\varkappa 1}$ und $P_{\varkappa 3}$ die Projektionen von P aus a und c auf $\varkappa$ sind. Die Charakteristik der perspektiven Kollineation ist $\delta = (L' K' P' P''')$. Wegen $L' = E'_\varkappa$, ferner $P' = P'_{\varkappa 1}$ und $P''' = P'''_{\varkappa 3} = P'_{\varkappa 3}$ ist

$$\delta = (E'_\varkappa K' P'_{\varkappa 1} P'_{\varkappa 3}) = (E_\varkappa K P_{\varkappa_1} P_{\varkappa 3}).$$

Projiziert man die letzteren vier Punkte aus P auf l, so erhält man $E_\varkappa, E, L_1, L_3$, und es wird $\delta = (e_\varkappa\, e\, a\, c)$.

Eine Ebene φ, welche durch eine Erzeugende e des Koinzidenzhyperboloides $\varkappa^2$ geht, erscheint in der Abbildung als perspektive Kollineation mit der Kerngeraden $c' = a'''$ als Kollineationsachse, einem Punkte $K' = K'''$ als Kollineationszentrum und mit der Charakteristik $\delta = (a\, c\, e_\varkappa\, e)$. Es gibt ∞^3 solcher Ebenen.

Den Übergang zwischen den beiden erwähnten Fällen bilden die Ebenen, welche durch die Erzeugende $e_\varkappa$ gehen. Es liegt dann das Kollineationszentrum auf der Achse $c' = a'''$, und es ist die Charakteristik $\delta = +1$. Liegen e und $e_\varkappa$ zu a, c harmonisch, so ergeben sich in beiden Fällen harmonische Kollineationen ($\delta = -1$).

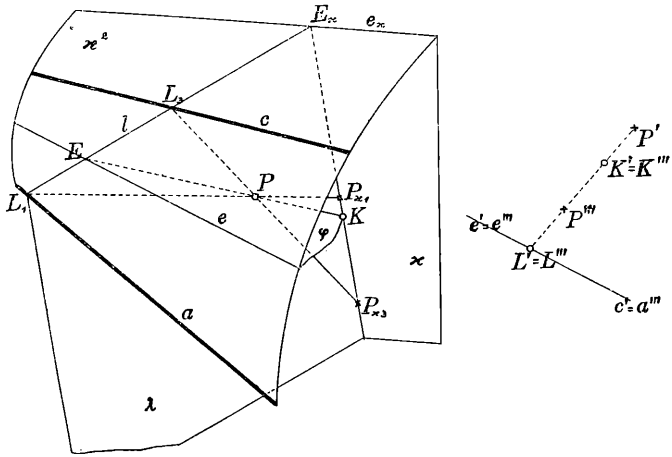

Fig. 6.

Es ist noch der besondere Fall zu erwähnen, wo die beiden Sehachsen a, c einen gemeinsamen Punkt U haben, also auf derselben Ebene ω liegen. Diese Ebene schneidet α in einem Punkte C_0' und γ in A_0'''. Das Büschel von Überebenen, welche durch ω gehen, ergibt projektive Strahlbüschel auf α und γ; auf ε hat man dann projektive Strahlbüschel C' und A'''. Die Punkte einer solchen Überebene haben ihren Grundriß P' auf einem Strahle von C' und ihren Kreuzriß P''' auf dem entsprechenden Strahle von A'''. Durch ein solches Punktpaar ist aber hier der Punkt P nicht bestimmt; denn die beiden Sehebenen schneiden sich in einer durch U gehenden Geraden.

Insbesondere können bei der Übertragung auf ε die beiden Büschel C' und A''' in ein Ordnerbüschel zusammenfallen.

5. Zur metrischen Spezialisierung sei jetzt die uneigentliche Überebene Ω_∞ des Punktraumes R_4 angenommen und in ihr ein Poltetraeder $X\,Y\,Z\,U$ der absoluten

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Polarität (Fig. 7). Die gegenüberliegenden Kanten $ZU = a$ und $XY = c$ seien als Sehachsen gewählt und ein eigentlicher Punkt O als Ursprung, ferner sei $[Oc] = \alpha$ die Grundebene, $[Oa] = \gamma$ die Kreuzrißebene, $OY = y$, $OZ = z$, $[yz] = \beta = \varepsilon$ die Bildebene. Jetzt sind also die Achsen y und z zueinander senkrecht, α und γ zueinander ganz senkrecht; α und γ sind zu ε halb senkrecht. Die Sehebenen $[aP]$ sind zu α ganz senkrecht, ebenso $[cP]$ zu γ. Es liegt also Orthogonalprojektion vor. Weil c auf α liegt, ist c auch zugleich c_0', und weil a auf γ liegt, ist a auch zugleich a_0''' Ist nun R_I, R_{II} das zu X, Z harmonisch liegende Punktpaar der auf der Kante XZ befindlichen absoluten Involution, dann liegen die absoluten Involutionen der Kanten $XY = c$ und $YZ = d$ perspektiv mit R_I, beziehungsweise R_{II} als Perspektivzentrum. Wird

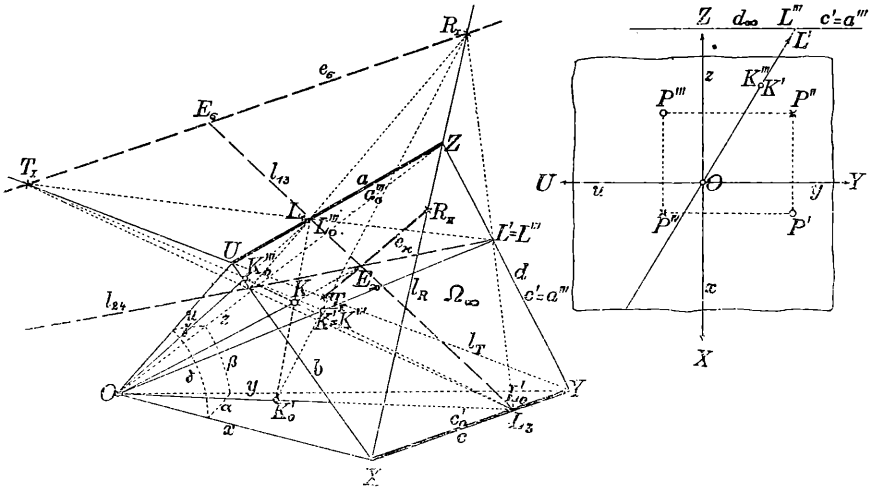

Fig. 7.

also die Ebene α aus R_I oder R_{II} auf die Ebene $\beta = \varepsilon$ projiziert, so ist dies eine kongruente Übertragung oder Umlegung um die unverändert bleibende Achse $OY = y$; dabei wird $d = c'$

Ist dann T_I, T_{II} das zu Y, U harmonisch liegende Punktpaar der absoluten Involution auf der Kante YU, so sind die absoluten Involutionen auf a und d perspektiv mit T_I oder T_{II} als Perspektivzentrum. Projiziert man nun die Ebene γ aus T_I oder T_{II} auf die Ebene $\beta = \varepsilon$, so ist das wieder eine kongruente Übertragung oder Umlegung um die unverändert bleibende Achse $OZ = z$; dabei wird $d = a'''$ Man hat also eine Abbildung der Punkte P von R_4 auf die Punktpaare P', P''' der Bildebene ε erhalten, und zwar von der besonderen Art, daß c' und a''' in der uneigentlichen Geraden d der Bildebene ε zusammenfallen. Es soll jetzt das Koinzidenzhyperboloid $\varkappa^2$ und die Koinzidenzebene $\varkappa$ aufgesucht werden.

Die Verbindungsgeraden $R_I T_I = e_\sigma$ und $R_{II} T_{II} = e_\varkappa$ sind wieder Polargerade der absoluten Polarität. Denkt man sich nun e_σ als Achse eines Ebenenbüschels, so scheidet jede Ebene des Büschels, die im Raume Ω_∞ liegt, das Poltetraeder in einem vollständigen Vierseit, welches außer R_I und T_I noch vier Eckpunkte auf a, b, c, d hat. Betrachtet man den auf d liegenden Eckpunkt als $L' = L'''$, so liegt auf a der Eckpunkt $L_1 = L_0'''$, der sich durch Projizieren von L''' aus T_I ergibt, und auf c der Punkt $L_3 = L_0'$, der sich durch Projizieren von L' aus R_I ergibt. Die Diagonale $L_1 L_3 = l_{13}$ des Vierseites ist dann eine Erzeugende des Koinzidenzhyperboloides $\varkappa^2$. Dabei ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen l_{13} und l_{24} ein Punkt $E_\varkappa$ der Polargeraden $e_\varkappa$. Die Erzeugende l_{13} schneidet bei jeder Lage der Ebene die Achse e_σ des Büschels und auch $e_\varkappa$; daher sind $e_\varkappa$ und e_σ Erzeugende jenes Systems des Hyperboloides, welchem auch a und c angehören. Rückt $L' = L'''$ nach Z, so ergibt sich XZ als Erzeugende l_R, und rückt es nach Y, so erhält man YU als Erzeugende l_T.

Verbindet man $L' = L'''$ mit dem Ursprung O und betrachtet man auf dieser Verbindungsgeraden die Reihen der sich deckenden Punkte $K' = K'''$, so ist die Reihe $O K' L'$ kongruent mit der auf der Grundebene α liegenden Reihe $O K_0' L_0'$ als Projektion aus R_I und auch kongruent mit der auf der Kreuzrißebene γ liegenden Reihe $O K_0''' L_0'''$: es ist also $O K_0' = O K_0'''$. Die Schnittebene $O L_1 L_3$ der beiden Überebenen $[a\, O L_3]$ und $[c\, O L_1]$ wird daher von der Sehebene $[a K_0']$ in $L_1 K_0'$ und von der Sehebene $[c K_0''']$ in $L_3 K_0'''$ geschnitten. Der Schnittpunkt von $L_1 K_0'$ und $L_3 K_0'''$ ist der Punkt K selbst. Das Viereck $O K_0' K K_0'''$ ist ein Quadrat; die Diagonale $O K$ muß daher durch $E_\varkappa$ und die Diagonale $K_0' K_0'''$ durch E_σ gehen, nämlich durch das zu $L_1 L_3$ harmonisch liegende Punktpaar der absoluten Involution von l_{13}.

Die Ebene $[O e_\varkappa]$, welche alle Geraden $O E_\varkappa$ enthält, ist also die Koinzidenzebene $\varkappa$; die Ebene $[O e_\sigma]$ ist die Symmetrieebene σ, für welche die Bilder P' und P''' zu O symmetrisch liegen (p. 629). Die Ebenen $\varkappa$ und σ sind zueinander ganz senkrecht.

Betrachtet man $XU = b$ und $YZ = d$ als Sehachsen, $[O d] = \beta$ als Aufrißebene und $[O b] = \delta$ als Querrißebene, und macht man eine kongruente Übertragung aus R_I und T_I auf die Ebene α [oder aus T_I und R_I auf die Ebene γ], so erhält man eine ganz gleichwertige Abbildung der Punkte P des Raumes R_4 durch die Punktpaare P'', P^{IV} auf der Bildebene α [oder γ], die aber durch Umlegung wieder mit ε zusammengelegt werden kann.

Je zwei benachbarte Bilder, wie z. B. Grundriß und Aufriß, ergeben eine Abbildung von der besonderen Art (p. 629), bei welcher sich die beiden Sehachsen a und b in einem Punkte U schneiden und auf derselben Ebene UXZ liegen. Diese Ebene schneidet α in X und β in Z. Das Büschel der Überebenen, welche

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

durch die Ebene UXZ gehen, schneidet α in dem Parallelstrahlbüschel X_∞ und β in dem Parallelstrahlbüschel Z_∞, so daß die entsprechenden Strahlen durch denselben Punkt von y gehen. Bei der Umlegung fallen dann diese beiden Strahlbüschel in ein Ordnerbüschel zusammen, so daß P' und P'' auf einem zu $x = z$ parallelen Ordner liegen müssen. Durch ein solches Punktpaar wäre aber der Punkt P von R_4 nicht bestimmt. In der Abbildung sind also die zwei Punktpaare P', P''' und P'', P^{IV} die Eckpunkte eines Rechteckes, dessen Seiten zu den Achsen $x = z$ und $y = u$ parallel sind. Es ist nun zu ersehen, daß man hiemit auf die von P. H. Schoute[1] untersuchte Abbildung des R_4 kommt und daß diese eigentlich eine Vereinigung von zwei gleichwertigen Abbildungen durch die Punktpaare P', P''', beziehungsweise P'', P^{IV} ist.

Bei der zweiten Abbildung wird das Koinzidenzhyperboloid von den projektiven Ebenenbüscheln b und d der Überebene Ω_∞ erzeugt. Die zweiten Diagonalen $L_2 L_4 = l_{24}$ der von den Ebenen des Büschels e_σ ausgeschnittenen Vierseite (wobei L_2 auf b und L_4 auf d liegt) bilden jetzt das zweite System von Erzeugenden, zu welchen auch wieder l_R und l_T gehört. Die beiden Hyperboloide haben also die vier Erzeugenden e_σ, $e_\varkappa$, l_R, l_T gemeinsam. Für beide Abbildungen ist $[O e_\varkappa]$ die Koinzidenzebene $\varkappa$. Tatsächlich ist für $K' = K'''$ auch $K'' = K^{IV}$

6. Eine Punktreihe g ist hier durch zwei ähnliche Punktreihen g', g''' abgebildet, welche durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt sind.

Ein Punktfeld φ ist durch affine Felder φ', φ''' abgebildet, welche durch die Bilder $A'\,B'\,C'$ und $A'''\,B'''\,C'''$ eines Dreieckes $A\,B\,C$ gegeben sind. Die zwei Schnittpunkte E, F der uneigentlichen Geraden u von φ mit dem Koinzidenzhyperboloid $\varkappa^2$ ergeben die zwei uneigentlichen Affinitätsdoppelpunkte $E' = E'''$ und $F' = F'''$ auf der uneigentlichen Geraden $d_\infty = c' = a'''$ der Bildebene; der Schnittpunkt G von φ mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ hat den eigentlichen Affinitätsdoppelpunkt $G' = G'''$ als Abbildung. Zunächst kann man den letzteren in bekannter Weise konstruieren.

Sind zwei Ebenen φ und ψ durch je eine Affinität gegeben, so haben diese zwei Affinitäten drei gemeinsame Punktpaare, nämlich ein eigentliches Punktpaar und zwei uneigentliche Paare auf d_∞. Um sie zu finden, sucht man zum Dreieck $A_1'\,B_1'\,C_1'$ in der zweiten Affinität das entsprechende Dreieck $A_{12}'''\,B_{12}'''\,C_{12}'''$ und dann in der Affinität $A_1''\,B_1'''\,C_1''' - A_{12}'''\,B_{12}'''\,C_{12}'''$ die drei Affinitätsdoppelpunkte. Diese bilden dann die Kreuzrisse P''', Q_I''', Q_{II}''' der drei gemeinsamen Punktpaare, zu welchen man die Grundrisse P', Q_I', Q_{II}' finden kann. Das eigentliche gemeinsame Punktpaar P', P''' ist die Abbildung des Schnittpunktes P der beiden Ebenen φ und ψ.

[1] »Mehrdimensionale Geometrie«, I. Teil, p. 85 (1902), Sammlung Schubert, XXXV. Bd.

Die uneigentlichen Geraden u, v der Ebenen φ, ψ und die Sehachsen a, c sind vier windschiefe Gerade der Überebene Ω_∞. Sie bestimmen zwei Treffgerade q_I, q_{II}, welche durch die zwei uneigentlichen gemeinsamen Punktpaare Q'_I, Q'''_I und Q'_{II}, Q'''_{II} abgebildet sind.[1] Für $\psi = \varkappa$ geht dies in das Vorangehende über, wobei $v = e_\varkappa$ wird und die Geraden q_I, q_{II} zwei Erzeugende l des Koinzidenzhyperboloides $\varkappa^2$ sind.

Eine Überebene Π kann durch vier Punktpaare gegeben werden. Sie schneidet die Sehachsen a, c in zwei Punkten Q_1, Q_3, durch deren Verbindungsgerade $Q_1\, Q_3 = q$ die uneigentliche Ebene ω der Überebene Π geht. Dabei ist $Q_1 = Q'''_0$ und $Q_3 = Q'_0$, woraus sich das uneigentliche Punktpaar Q', Q''' auf der uneigentlichen Geraden d_∞ der Bildebene ergibt. Anderseits schneidet Π die Koinzidenzebene $\varkappa$ in einer Geraden k, für welche $k' = k'''$ ist. Aus den Strahlbüscheln, welche sich durch Verbinden von Q_3 und Q_1 mit den Punkten K von k ergeben, erhält man auf der Bildebene die Parallelstrahlbüschel Q' und Q''', welche hier perspektiv sind, weil sich je zwei entsprechende Strahlen in einem Punkt $K' = K'''$ von $k' = k'''$ schneiden. Die Punkte einer Ebene $Q_3\, Q_1\, K$ sind dann durch Punktpaare P', P''' abgebildet, welche auf entsprechenden Strahlen der beiden Büschel Q', Q''' liegen. Die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel Q', Q''' kann man daher als Ordner bezeichnen (Fig. 3 und 10).

Die Schnittgerade p_1^0 der Überebene Π mit der Grundebene α geht durch Q'_0. Da die Punkte der Geraden p_1^0 (sowie alle Punkte der Grundebene) ihren Kreuzriß in O haben, so sucht man in zweien von den vier Affinitäten, welche durch die vier gegebenen Punktpaare bestimmt sind, zu O''' die entsprechenden Punkte, also die Grundspuren der beiden Dreiecksebenen. Ihre Verbindungsgerade ist dann die Grundspur p_1 der Überebene Π und der uneigentliche Punkt von p_1 ist Q'_∞. In analoger Weise erhält man die Kreuzrißspur p_3 und den Punkt Q'''_∞.

Hienach kann man die vorhin erwähnte Konstruktion des eigentlichen Affinitätsdoppelpunktes $G' = G'''$ räumlich deuten. Nämlich man legt durch die Ebene φ eine Überebene, z. B. so, daß der uneigentliche Punkt von $B'\, C'$ als Q'_∞ und jener von $B'''\, C'''$ als Q'''_∞ angenommen wird. Diese Parallelstrahlbüschel sind perspektiv und ergeben eine Perspektivachse q, welche die Abbildung $q' = q'''$ der Schnittgeraden der Überebene mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ ist. Nun legt man durch φ noch eine zweite Überebene, wobei der uneigentliche Punkt von $A'\, B'$ als P'_∞ und jener von $A'''\, B'''$ als P'''_∞ gewählt wird. Die Perspektivachse p der Parallelstrahlbüschel P'_∞ und P'''_∞ ist die Abbildung $p' = p'''$ der Schnittgerade der Überebene mit $\varkappa$. Der Schnittpunkt von p und q ist der eigentliche Affinitätsdoppelpunkt $G' = G'''$. Die

[1] Dahin ist die Bemerkung bei P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil, p. 96, und bei L. Eckhart, Konstruktive Abbildungsverfahren (1926), p. 28, zu ergänzen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Doppelstrahlen der vereinigten projektiven Strahlbüschel $G' = G'''$ ergeben dann die Richtungen der beiden Punkte $E' = E'''_\infty$ und $F' = F'''_\infty$. Die Charakteristik dieser Büschel ist

$$\delta = G' (E' F' P' P''') = (a\, c\, e_F\, e_E).$$

Die ∞^6 Ebenen φ des Raumes R_4 sind hier durch die »Gruppe der ∞^6 Affinitäten (linearen Transformationen)« der Bildebene ε abgebildet; die Charakteristik des eigentlichen Doppelpunktes $G' = G'''$ ist dabei $\delta_G = (a\, c\, e_F\, e_E)$.

Die verschiedenen Arten der Affinität ergeben sich aus verschiedenen Lagen der uneigentlichen Geraden u von φ zum Koinzidenzhyperboloid $\varkappa^2$. Dieses wird zunächst durch die beiden Sehachsen in zwei Fächer geteilt. Bei einer ungleichsinnigen Affinität ist δ_G negativ, und die uneigentlichen Doppelpunkte sind reell. Eine solche Affinität ist daher die Abbildung einer Ebene φ, für welche die Schnittpunkte E, F von u in verschiedenen Fächern von $\varkappa^2$ liegen, weil dann die Erzeugenden e_F und e_E in bezug auf a und c ungleichbezeichnete Teilverhältnisse haben. Bei einer gleichsinnigen Affinität können die uneigentlichen Doppelpunkte reell, vereinigt oder imaginär sein. Für die zugehörigen Ebenen φ hat die Gerade u zwei reelle Schnittpunkte E, F, welche in demselben Fach liegen, oder u ist Tangente von $\varkappa^2$, oder u hat zwei imaginäre Schnittpunkte. Ist u eine der ∞^3 Tangenten von $\varkappa^2$, so gehen durch jede solche Gerade noch ∞^2 Ebenen.

Die ∞^5 Ebenen φ von R_4, deren uneigentliche Gerade u eine Tangente von $\varkappa^2$ ist, sind durch die Untergruppe der ∞^5 Affinitäten [Art 2 bei Lie-Scheffers, Kontinuierliche Gruppen, p. 60 (1893)] abgebildet, bei welchen die Doppelstrahlen der projektiven Büschel $G' = G'''$ zusammenfallen ($\delta_G = +1$)[1].

Wenn sich in der vorerwähnten Konstruktion p parallel zu q ergibt, so rückt der eigentliche Doppelpunkt $G' = G'''$ auch ins Unendliche und wird etwa benachbart zu $E' = E'''_\infty$ (Fig. 8). Der zweite Doppelpunkt $F' = F'''$ auf d_∞ ergibt sich, indem man durch den bekannten Doppelpunkt $E' = E'''_\infty$ eine Gerade legt, z. B. p, und auf dieser zwei Scheitel S' und S''' wählt. Die Büschel, welche E', P', Q' aus S' und E''', P''', Q''' aus S''' projizieren, sind perspektiv; ihre Perspektivachse r schneidet d_∞ im Doppelpunkt $F' = F'''_\infty$. Diesem Doppelpunkt liegt die eigentliche Doppelgerade $f' = f'''$ der Affinität gegenüber. Um sie zu erhalten, legt man durch $F' = F'''$ zwei entsprechende Gerade, etwa von A' bis zum Schnittpunkt mit $B' C'$ und von A''' bis zum Schnittpunkt mit $B''' C'''$. Diese beiden Reihen sind perspektiv mit einem Zentrum T. Durch T geht parallel zu p die eigentliche Doppelgerade

---

[1] Eine gleichsinnige Affinität (Art 1) kann in diese besondere Affinität (Art 2) übergeführt werden durch Drehung um $G' = G'''$, bis zwei entsprechende Potenzstrahlen sich decken.

$f' = f'''$ der Affinität. Auf ihr liegen zwei gleichlaufend kongruente Punktreihen (um eine Strecke t verschoben), weil sie zwei benachbarte uneigentliche Doppelpunkte $G' = G'''$ und $E' = E'''$ haben. Da hier der auf der Koinzidenzebene $\varkappa$ liegende Punkt G in den Punkt E hineinrückt, muß E ein Punkt $E_\varkappa$ von $e_\varkappa$ sein; die Gerade u hat also hier mit der Erzeugenden $e_\varkappa$ von $\varkappa^2$ einen Punkt $E_\varkappa$ gemeinsam (vgl. Fig. 5), und solche Gerade gibt es ∞^3.

Die ∞^5 Ebenen φ von R_4, welche zur Koinzidenzebene $\varkappa$ halbparallel sind, indem ihre Geraden u dem Strahlgebüsch $e_\varkappa$ angehören, sind durch die Untergruppe der ∞^5 Affinitäten [Art 3 bei Lie-Scheffers] abgebildet, bei

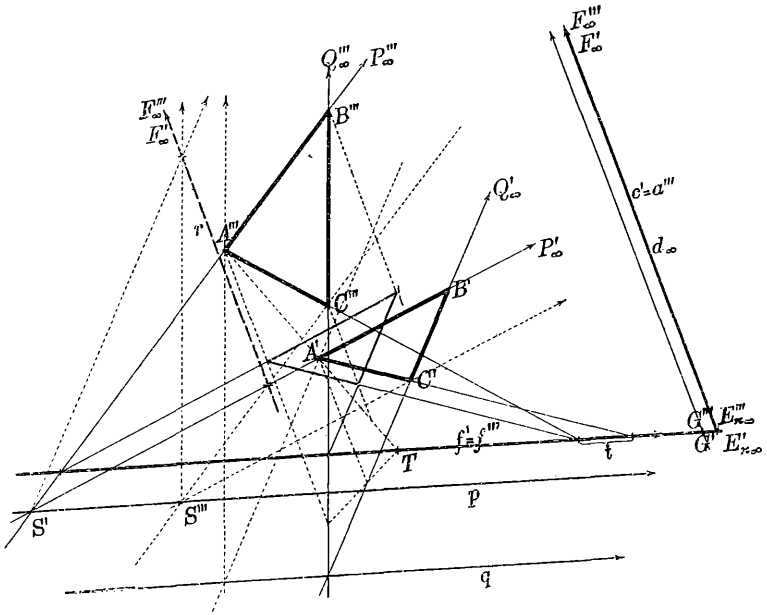

Fig. 8.

welchen entsprechende kongruente Punktreihen gleichlaufend parallel liegen, so daß sie gleichlaufend oder ungleichlaufend ähnliche Parallelstrahlbüschel mit einem eigentlichen Doppelstrahl $f' = f'''$ bilden, während entsprechende kongruente Parallelstrahlbüschel auch gleichlaufend parallel liegen und zwei benachbarte uneigentliche Gerade (bei d_∞) als Doppelstrahlen besitzen.

Durch eine solche Gerade u des Strahlgebüsches $e_\varkappa$ gehen ∞^2 zueinander ganz parallele Ebenen, deren Abbildungen sich durch die ∞^2 Parallelverschiebungen des Dreiecks $A' B' C'$ ergeben. Verschiebt man $A' B' C'$ in der Richtung von $f' = f'''$ um die Strecke t, so wird die Affinität perspektiv mit f' als Affinitätsachse $k' = k'''$ und $F' = F'''_\infty$ als Scheitel der Affinitätstrahlen. Verschiebt man

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dann $A' B' C'$ in der Richtung von r, so bleibt die Affinität immer perspektiv, wobei sich die Affinitätsachse $k' = k'''$ parallel verschiebt. Im R_4 entspricht diesen ∞^1 perspektiven Affinitäten, daß unter den ∞^2 zueinander ganz parallelen Ebenen, welche durch eine solche Gerade u gehen, ∞^1 sind, die in der Überebene $[u\ \varkappa]$ liegen und daher die Koinzidenzebene $\varkappa$ nicht in einem Punkte G, sondern in einer Geraden k schneiden.

Die ∞^4 Ebenen φ von R_4, deren Geraden u mit $e_\varkappa$ einen gemeinsamen Punkt $E_\varkappa$ haben und welche in der Überebene $[u\ \varkappa]$ liegen, sind durch die ∞^4 perspektiven Affinitäten [Art 5 bei Lie-Scheffers] abgebildet, welche $k' = k'''$ als Affinitätsachse und $F' = F''_\infty$ als Scheitel der Affinitätstrahlen haben.

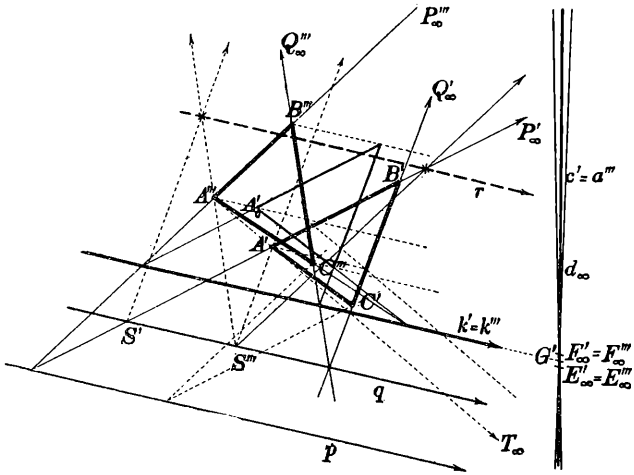

Fig. 9.

Auf der Doppelgeraden $c' = a''' = d_\infty$ ist in den beiden letzten Fällen die Charakteristik $\delta = (E'_\varkappa\, F'\, P'\, P''') = (a\ c\ e_F\, e_\varkappa)$. Sie ist auch die Charakteristik für die ganze perspektive Affinität und gibt daher auch in beiden Fällen die Flächenverzerrung der Bilddreiecke an. Sie bleibt die gleiche für alle Geraden u, welche dem hyperbolischen Strahlnetz $[e_F\, e_\varkappa]$ angehören.

Wird die Erzeugende e_F benachbart zu $e_\varkappa$, geht also das hyperbolische Strahlnetz in ein parabolisches über, so daß die Gerade u eine Tangente des Koinzidenzhyperboloides bei $E_\varkappa$ wird, dann ist die Charakteristik $\delta = +1$, und die beiden Bilddreiecke werden daher flächengleich, wobei die Richtung von entsprechenden kongruenten Punktreihen mit jener von entsprechenden gleichlaufend kongruenten Parallelstrahlbüscheln zusammenfällt.

In der Abbildung (Fig. 9) zeigt sich das dadurch, daß r auch zu p und q parallel wird und $F' = F'''$ auf d_∞ benachbart zu

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$E' = E'''$ wird. Die durch A' und A''' gehenden Reihen parallel zu p sind jetzt perspektiv kongruent; ihr Perspektivzentrum T ist ein uneigentlicher Punkt. Die Doppelgerade $f' = f'''$ fällt also hier auch mit d_∞ zusammen, so daß drei benachbarte Doppelpunkte und drei benachbarte Doppelgerade im Unendlichen liegen.

Die ∞^4 Ebenen φ von R_4, deren Gerade u eine Tangente von $\varkappa^2$ in einem Punkt von $e_\varkappa$ ist, sind durch die Untergruppe der ∞^4 gleichsinnig flächengleichen Affinitäten abgebildet, bei welchen entsprechende kongruente Punktreihen parallel liegen, so daß sie gleichlaufend kongruente Parallelstrahlbüschel mit zwei zu d_∞ benachbarten Doppelstrahlen bilden [Art 4 bei Lie-Scheffers].

Nur wenn man $A'B'C'$ so parallel verschiebt, daß A' in einen Punkt A'_0 der durch A''' parallel zu p gehenden Geraden zu liegen kommt, werden die Felder flächengleich perspektiv affin mit einer Achse $k' = k'''$ parallel zu p. Verschiebt man dann $A'B'C'$ in der Richtung von r, so bleiben die Felder flächengleich perspektiv affin, wobei die Affinitätsachse sich parallel verschiebt, indem andere kongruente Punktreihen zur Deckung kommen.

Die ∞^3 Ebenen φ von R^4, deren Gerade u eine Tangente von $\varkappa^2$ in einem Punkt von $e_\varkappa$ ist, und welche in der Überebene $[u\,\varkappa]$ liegen, sind durch die ∞^3 gleichsinnig flächengleich perspektiven Affinitäten abgebildet [Art 7 bei Lie-Scheffers].

Rückt e_F nach e_σ, so ist $\delta = -1$, und die Bilddreiecke werden ungleichsinng flächengleich.

Die ∞^4 Ebenen φ von R_4, deren Gerade u sowohl $e_\varkappa$ als auch e_σ schneidet, sind durch die ∞^4 ungleichsinnig flächengleichen Affinitäten abgebildet, welche eine eigentliche Doppelgerade $f' = f'''$ als Doppelstrahl für zwei ungleichlaufend kongruente Parallelstrahlbüschel besitzen, während die beiden anderen kongruenten Parallelstrahlbüschel gegeneinander parallel verschoben sind [besonderer Fall von Art 3].

Kommen die letztgenannten Büschel durch Verschiebung zur Deckung, so tritt perspektive Affinität ein, nämlich schief axiale Symmetrie [besonderer Fall von Art 5]. Die ∞^3 zugehörigen Ebenen φ liegen dann in der Überebene $[u\,\varkappa]$.

Die Kerngerade $c' = a''' = d_\infty$ enthält die absolute Involution der Bildebene mit den absoluten Kreispunkten J_∞, K_∞ als Doppelpunkten. Betrachtet man diese als $L' = L'''$, so gehen daraus zwei imaginäre Erzeugende l_J, l_K des Koinzidenzhyperboloides $\varkappa^2$ hervor, welche die Doppelpunkte der absoluten Involutionen auf a und c verbinden und daher auch Erzeugende der absoluten Fläche zweiten Grades $\mathfrak{t}^2$ sind. Außer diesen haben $\varkappa^2$ und $\mathfrak{t}^2$ noch zwei imaginäre Erzeugende e gemeinsam, welche die Doppelpunkte der absoluten Involutionen von l_R und l_T verbinden.

Die ∞^4 Ebenen φ von R_4, deren Gerade u dem elliptischen Strahlnetz $[l_J, l_K]$ angehört, sind durch die ∞^4

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gleichsinnigen Ähnlichkeiten abgebildet [besonderer Fall der Art 1].

Ist die Gerade u eine Erzeugende e von $\varkappa^2$ (Fig. 6), so gehört sie auch dem Strahlnetz $[l_J, l_K]$ an. Jeder Schnittpunkt von e mit einer Erzeugenden l erscheint als ein Punkt $L' = L'''$ auf d_∞, so daß die Kerngerade d_∞ zur Perspektivachse wird.

Die ∞^3 Ebenen φ von R_4, für welche u eine Erzeugende e von $\varkappa^2$ ist, sind durch die ∞^3 perspektiven Ähnlichkeiten abgebildet, welche einen Punkt $K' = K'''$ als Ähnlichkeitszentrum und $\delta = \frac{K''' P'''}{K' P'} = (a\, c\, e_\varkappa\, e)$ als Charakteristik haben [Art 6 bei L. Sch.]. Insbesondere sind die ∞^2 Ebenen φ von R_4, für welche $u = e_\varkappa$ ist, durch die ∞^2 zentrischen Symmetrien ($\delta = -1$) mit einem Zentrum $K' = K'''$ abgebildet.

Die ∞^2 Ebenen φ von R_4, welche zu $\varkappa$ ganz parallel sind, also durch $e_\varkappa$ gehen, sind durch die ∞^2 gleichsinnig perspektiven Kongruenzen (Verschiebungen = Translationen) abgebildet [Art 8 bei L. Sch.], wobei $\delta = +1$ ist. Die Ebene $\varkappa$ selbst ist durch die Identität abgebildet.

Bei einer Ebene φ, deren uneigentliche Gerade u die Sehachse a schneidet (Halbsehebene), ist der Grundriß aller Punkte Q von u ein Punkt Q' von c'. Die Überebene $[a\, \varphi]$ schneidet α in einer Geraden, deren Grundriß durch Q' geht. Auf diesem müssen die Grundrisse aller Punkte von φ liegen. Es ergibt sich also eine Affinität mit einer singulären Geraden (Punktreihe) im Grundriß. Gehört die Gerade u dem Strahlnetz $[a\, c]$ an, so erhält man in der Abbildung die zwei Geraden $Q' K'$, $Q''' K'''$, wobei Q', Q''' die Abbildung des Netzstrahles u und $K' = K'''$ die Abbildung des Schnittpunktes von φ mit der Koinzidenzebene ist. Die Affinität reduziert sich hier auf diese zwei singulären Geraden, durch deren ∞^2 Punktpaare die Punkte der Ebene φ abgebildet sind.

7 Man betrachte nun α und γ als Spurfelder, welche wieder aus R und T auf die Bildebene ε übertragen werden. Jede Überebene Π hat zwei Spuren p_1^0, p_3^0 und auf ε die Spuren p_1, p_3, durch welche sie eindeutig bestimmt ist.

Die ∞^4 Überebenen des Raumes R_4 sind durch die ∞^4 Geradenpaare p_1, p_3 abgebildet. Man erhält so ein zum Zweibildersystem duales Zweispurensystem.[1]

Nun kann man wieder nach jenen Überebenen fragen, für welche die Spuren p_1 und p_3 koinzidieren. Aus den Spuren $k_1 = k_3$, welche sich auf ε decken, gehen zwei kollineare Spurfelder auf α und γ hervor. Zwei kollineare Felder erzeugen im allgemeinen durch die ∞^2 Verbindungsüberebenen der entsprechenden Geraden eine zweidimensionale Fläche III. Klasse; denn eine beliebige

[1] Die Spuren p_2^0, p_4^0 auf β und δ ergeben ein zweites gleichwertiges Zweispurensystem.

Gerade g bestimmt mit den Geraden des einen und anderen Feldes je ein axiales Bündel von Überebenen. Zwei kollineare koaxiale Bündel haben drei selbstentsprechende Überebenen; durch eine beliebige Gerade g gehen also drei Berührungsüberebenen der Fläche. Die zwei kollinearen Felder α und γ haben aber hier ihren Schnittpunkt O als selbstentsprechenden Punkt; daher zerfällt die Fläche III. Klasse. Das Büschel der durch O gehenden vereinigten Strahlen $l_1 = l_3$ ergibt zwei projektive Strahlbüschel $O(l_1^0)$ auf α und $O(l_3^0)$ auf γ. Diese erzeugen einen Kegel II. Klasse k^2 mit O als Spitze. Alle ∞^1 Überebenen Λ, welche durch eine Berührungsebene λ dieses Kegels gehen, haben einen bestimmten Strahl $l_1 = l_3$ des Büschels O als vereinigte Spuren.[1]

Die zu den ∞^2 vereinigten Spuren $k_1 = k_3$ (welche nicht durch O gehen) gehörigen ∞^2 Überebenen K müssen ein Gebilde I. Klasse ergeben, also ein Überebenenbüschel mit einer Geraden k als Achse. Für die Überebene Ω_∞ fallen die Spuren $o_1 = o_3$ in eine Gerade, nämlich d_∞, zusammen; daher liegt die Koinzidenzgerade k in Ω_∞.

Jeder Punkt K der Koinzidenzebene $\varkappa$ hat zusammenfallende Bilder $K' = K'''$.

Jede Überebene K der Koinzidenzgeraden k hat zusammenfallende Spuren $k_1 = k_3$.

Bei den unter Nr. 5 gemachten Voraussetzungen soll nun noch die Inzidenz von Punkt und Überebene mit Hervorhebung der Dualität untersucht werden.

Eine Überebene Π (p_1, p_3) schneidet Ω_∞ in einer Ebene ω, und diese scheidet die Sehachsen a, c in zwei Punkten S_1, S_3, welche eine Verbindungsgerade s haben, die auf ω liegt.

Die Gerade s ergibt mit a eine Sehebene und S_3 als Bild S_0' aller Punkte von s, ebenso S_1 als S_0'''. Die ∞^1 ganz parallelen Ebenen π, welche durch den Netzstrahl $S_1 S_3 = s$ gehen und in der Überebene Π liegen, bestimmen mit a Überebenen, welche α in Strahlen p_0' des Büschels S_0' schneiden, und mit c Überebenen, welche γ in Strahlen p_0''' des Büschels S_0'''

Ein Punkt P (P', P''') bestimmt mit O eine Gerade o, und diese ergibt mit den Ebenen α, γ zwei Überebenen Σ_1, Σ_3, welche eine Schnittebene σ haben, die durch o geht.

Die Ebene σ schneidet α in einer Geraden s_1^0 als Spur aller Überebenen von σ, und γ in s_3^0. Die ∞^1 Strahlen p, welche auf der Schnittebene $\Sigma_1 \Sigma_3 = \sigma$ liegen und durch den Punkt P gehen, ergeben mit α Punkte P_1^0 der Reihe s_1^0 und mit γ Punkte P_3^0 der Reihe s_3^0. Unter den Strahlen ist o, welcher α und γ in O schneidet, ferner der Schnittstrahl

[1] Eine durch O gehende Ebene ergibt mit den Grundspuren l_1^0 Überebenen, welche die Ebene γ in einem Strahlbüschel O schneiden, das mit dem Büschel der Kreuzrißspuren l_3^0 projektiv ist. Die Doppelstrahlen dieser Büschel führen zu den zwei Berührungsüberebenen, welche aus der angenommenen Ebene an den Kegel gelegt werden können.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schneiden. Unter diesen Überebenen ist Ω und Π selbst, daher ist der uneigentliche Schnittpunkt $o_1 p_1 = S'$ und der uneigentliche Schnittpunkt $o_3 p_3 = S'''$ (Fig. 10).

Die projektiven Strahlbüschel $S'(p')$ und $S'''(p''')$ sind perspektiv ähnlich, weil der uneigentliche Verbindungstrahl sich selbst entspricht. Der Schnittpunkt von je zwei entsprechenden Strahlen p' und p''' bedeutet die vereinigten Bilder $K' = K'''$ des Punktes K, in welchem die zugehörige Ebene π die Koinzidenzebene $\varkappa$ schneidet. Die Schnittpunkte liegen auf der Perspektivachse, welche die vereinigten Bilder $k' = k'''$ der Schnittgeraden k der Überebene Π mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ bedeutet (p. 633). Da alle Punkte von p_1 ihren Kreuzriß in O haben, ist der Schnittpunkt von p_1 mit dem Parallelstrahl zu p_3 durch O ein Punkt von $k' = k'''$, und da alle Punkte von p_3 ihren Grundriß in O haben, ist der Schnittpunkt von p_3 mit dem Parallelstrahl zu p_1 durch O ein zweiter Punkt von $k' = k'''$

Die ∞^3 Punkte P, welche auf einer Überebene $\Pi(p_1, p_3)$ liegen, sind durch Punktpaare P', P''' abgebildet, welche auf entsprechenden Strahlen der perspektiv ähnlichen Ordnerbüschel $S'(p')$ und $S'''(p''')$ liegen, wobei $k' = k'''$ die Perspektivachse ist.

von σ mit der Sehebene $[a\,P]$, welcher α in P'_0 trifft, und der Schnittstrahl von σ mit der Sehebene $[c\,P]$, welcher γ in P'''_0 schneidet; daher ist $O\,P' = s_1$ und $O\,P''' = s_3$ (Fig. 11).

Die projektiven Punktreihen $s_1(P_1)$ und $s_3(P_3)$ sind perspektiv, weil der Schnittpunkt O sich selbst entspricht. Die Verbindungsgerade entsprechender Punkte P_1 und P_3 bedeutet die vereinigten Spuren $k_1 = k_3$ der Überebene K, welche den zugehörigen Strahl p mit der Koinzidenzgeraden k verbindet. Die Verbindungsgeraden gehen durch das Perspektivzentrum, welches die vereinigten Spuren $K_1 = K_3$ der Verbindungsebene $\varkappa$ des Punktes P mit der Koinzidenzgeraden k bedeutet. Da P' und P''' die Gegenpunkte der perspektiven Punktreihen s_1 und s_3 sind, ist der Schnittpunkt der Geraden, welche durch P' parallel zu s_3 geht, mit der Geraden, welche durch P''' parallel zu s_1 geht, das Perspektivzentrum $K_1 = K_3$.

Die ∞^3 Überebenen Π, welche durch einen Punkt $P(P', P''')$ gehen, sind durch Geradenpaare p_1, p_3 abgebildet, die durch entsprechende Punkte der perspektiven Ordnerreihen $s_1(P_1)$ und $s_3(P_3)$ gehen, wobei $K_1 = K_3$ das Perspektivzentrum ist.

Hieraus erhält man leicht die analytische Bedingung für die Inzidenz

eines Punktes		einer Überebene
$P\{P'(x, y), P'''(z, u)\}$	und	$\Pi\{p_1(a, b), p_3(c, d)\}$.

Das Strahlbüschel $S'(p')$ schneidet y in einer Punktreihe, und das Strahlbüschel $S'''(p''')$ schneidet z in einer ähnlichen Punktreihe

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Projiziert man diese Reihen aus den sich entsprechenden uneigentlichen Punkten von z, beziehungsweise y, so erhält man perspektiv ähnliche Parallelstrahlbüschel mit der Aufrißspur p_2 als Perspektivachse. Die Gleichungen der Ordner $p'(a_0, b_0)$ und $p'''(c_0, d_0)$ sind:

$$\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1, \text{ wobei } \frac{a_0}{a} = \frac{b_0}{b}, \text{ also } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{b_0}{b}$$

$$\frac{z}{c_0} + \frac{u}{d_0} = 1, \text{ wobei } \frac{c_0}{c} = \frac{d_0}{d}, \text{ also } \frac{z}{c} + \frac{u}{d} = \frac{d_0}{d} = \frac{c_0}{c}.$$

Durch Addition ergibt sich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{u}{d} = \frac{b_0}{b} + \frac{c_0}{c} = 1;$$

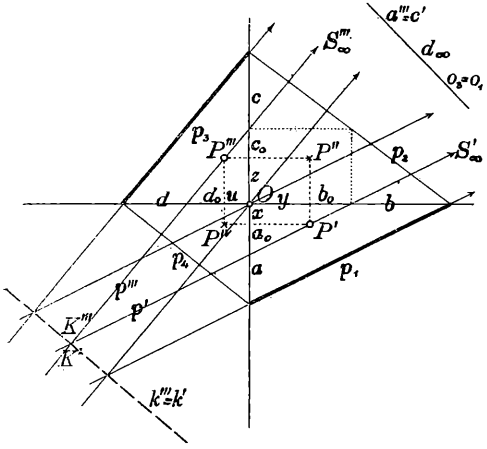

Fig. 10.

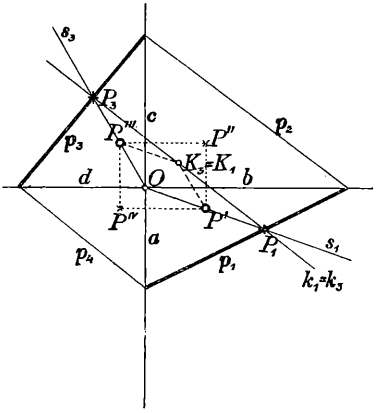

Fig. 11.

denn b_0 und c_0 sind die Koordinaten des Schnittpunktes, welcher auf der Perspektivachse $p_2(b, c)$ liegen muß. Setzt man

$$-\frac{1}{a} = \alpha, \quad -\frac{1}{b} = \beta, \quad -\frac{1}{c} = \gamma, \quad -\frac{1}{d} = \delta,$$

so wird die Gleichung sowohl in x, y, z, u als auch in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ linear, nämlich

$$\alpha . x + \beta . y + \gamma . z + \delta . u + 1 = 0.$$

Sie stellt einerseits die Punkte vor, welche auf einer Überebene II liegen,

Soll für einen eigentlichen Punkt K der Grundriß K' mit

anderseits die Überebenen, welche durch den Punkt P gehen.

Soll für eine Überebene K die Grundspur k_1 mit der Kreuz-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dem Kreuzriß K''' koinzidieren, so muß sein:

$$x = -z \text{ und } y = -u.$$

Jede der beiden Gleichungen

$$x+z = 0 \text{ und } y+u = 0$$

bedeutet eine Überebene, welche durch O geht. Bei der ersteren liegen P' und P''' auf einem horizontalen Ordner und bei der anderen auf einem aufrechten Ordner.

Beide Gleichungen zusammen bedeuten die durch O gehende Schnittebene der beiden Überebenen, und das ist die Koinzidenzebene $\varkappa$. Dagegen sind

$$x-z = 0 \text{ und } y-u = 0$$

die Gleichungen der Symmetrieebene σ (p. 631).

rißspur k_3 koinzidieren, so muß sein:

$$\alpha = -\gamma \text{ und } \beta = -\delta.$$

Jede der beiden Gleichungen

$$\alpha+\gamma = 0 \text{ und } \beta+\delta = 0$$

bedeutet einen Punkt, welcher in Ω_∞ liegt. Bei dem ersteren sind die Ordnerreihen auf x in Deckung und bei dem anderen auf y.

Beide Gleichungen zusammen bedeuten die in Ω_∞ liegende Verbindungsgerade der beiden Punkte, und das ist die Koinzidenzgerade k. Die Gleichung einer Überebene $\mathbf{K}$ ist

$$\alpha(x-z)+\beta(y-u)+1 = 0;$$

daher sind die Überebenen $\mathbf{K}$ zur Symmetrieebene parallel.

Die Koinzidenzgerade k des Zweispurensystems ist die uneigentliche Gerade der Symmetrieebene σ.

Durch einen Punkt P geht eine Ebene $[Pe_\sigma]$ mit den Spuren $K_1 = K_3$ ganz normal zur Koinzidenzebene $\varkappa$ und durch $[Pe_\sigma]$ gehen ∞^1 Überebenen $\mathbf{K}$ mit vereinigten Spuren $k_1 = k_3$ normal zur Koinzidenzebene $\varkappa$.

Soll für einen uneigentlichen Punkt L_∞ der Grundriß L'_∞ mit dem Kreuzriß L'''_∞ koinzidieren, so muß

$$x = y = z = u = \infty$$

sein, und anderseits muß der Richtungsquotient

$$q = \frac{y}{x} = \frac{u}{z}$$

sein oder

$$xu - yz = 0.$$

Die erste Bedingung bedeutet die uneigentliche Überebene Ω_∞, und die andere Gleichung bedeutet eine Überfläche zweiter Ordnung, beides zusammen die in Ω_∞ liegende Schnittfläche zweiter

Für eine Überebene Λ, bei welcher die Spuren in eine durch O gehende Gerade $l_1 = l_3$ zusammenfallen, ist

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \infty,$$

und es muß der Richtungsquotient

$$q = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

sein oder

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Die erste Bedingung bedeutet die Überebenen durch O, die andere Gleichung bedeutet eine Überfläche zweiter Klasse; beides zusammen ergibt den Koinzidenzkegel k^2 zweiter Klasse

Ordnung, und diese ist das Koinzidenzhyperboloid $\varkappa^2$ (p. 626).

Für eine Überebene II, bei welcher die Spuren p_1 und p_3 zueinander parallel sind (Fig. 12), werden die Strahlbüschel S' und S''' vereinigte ähnliche Parallelstrahlbüschel $L'_\infty = L'''_\infty$ mit der Charakteristik

$$q = \frac{O p_1}{O p_3} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

und zwar gleichlaufend oder ungleichlaufend, je nachdem die

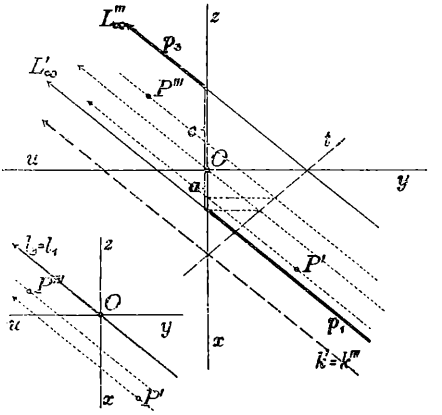

Fig. 12*a*. Fig. 12.

Spuren auf verschiedenen Seiten von O oder auf derselben Seite liegen. Die Schnittgerade k ($k' = k'''$) mit der Koinzidenzebene $\varkappa$ kann hier als eigentlicher Doppelstrahl dieser ähnlichen Büschel konstruiert werden. Projiziert man die Reihe x aus dem uneigentlichen Punkte von y, so ergibt sich eine Perspektivachse t, die x im eigentlichen Doppelpunkt schneidet.

Es ist

$$q = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta}$$

und

$$\alpha . \delta - \beta . \gamma = 0.$$

mit der Spitze in O (p. 639). Er projiziert die Erzeugenden l von $\varkappa^2$ aus O.

Für einen Punkt P, bei welchem die Gerade $P' P'''$ durch O geht (Fig. 13), sind die Reihen s_1 und s_3 vereinigte projektive Punktreihen auf $l_1 = l_3$ mit der Charakteristik

$$q = \frac{O P'}{O P'''},$$

und zwar gleichlaufend oder ungleichlaufend, je nachdem die

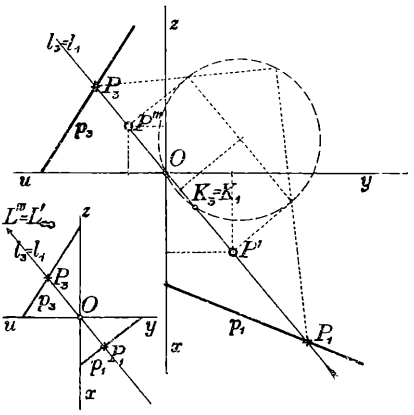

Fig. 13*a*. Fig. 13.

Bilder P', P''' auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von O liegen. Die Verbindungsebene des Punktes P mit der Koinzidenzgeraden $k = e_\sigma$ hat hier ihre Spuren $K_1 = K_3$ symmetrisch zu O in bezug auf die Verschwindungspunkte P', P'''. Der Hilfskreis hat die Hälfte der Strecke $P' P'''$ als Radius und geht durch den Doppelpunkt O. Er liefert zu jedem P_1 den entsprechenden Punkt P_3.

Es ist

$$q = \frac{O P'}{O P'''} = \frac{x}{z} = \frac{y}{u}$$

und

$$x . u - y . z = 0.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Diese ∞^3 Überebenen bilden also die vorhin erwähnte Überfläche zweiter Klasse.

Als Grenzfall sind die ∞^2 Überebenen Λ zu betrachten (Fig. 12*a*), für welche die Spuren in eine durch O gehende Gerade $l_1 = l_3$ zusammenfallen, die den eigentlichen Doppelstrahl der ähnlichen Ordnerbüschel bildet. Sie berühren den Koinzidenzkegel k^2.

Diese Punkte bilden also die vorhin erwähnte Überfläche zweiter Ordnung.

Als Grenzfall sind die ∞^2 Punkte L zu betrachten (Fig. 13*a*), für welche die Bilder in einen uneigentlichen Punkt $L' = L'''_\infty$ zusammenfallen, der den zweiten Doppelpunkt der nunmehr ähnlichen Ordnerreihen bildet. Sie liegen auf dem Koinzidenzhyperboloid $\varkappa^2$.

Als besondere Fälle seien hervorgehoben:

1. Überebenen Π, für welche die Charakteristik $q = +1$ ist. Die Spuren p_1, p_3 liegen da

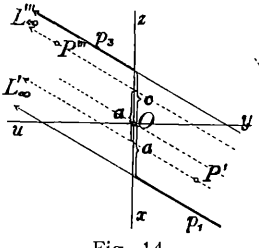

Fig. 14.

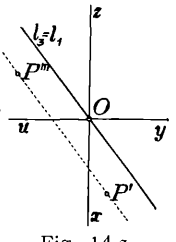

Fig. 14*a*.

symmetrisch zu O. Die Ordnerbüschel sind gleichlaufend kongruent, nämlich in der Richtung von x um $a = c$ verschoben (Fig. 14).

Der Doppelstrahl $k' = k'''$ rückt ins Unendliche, und k selbst geht in die uneigentliche Gerade $e_\varkappa$ von $\varkappa$ über.

Die ∞^2 Überebenen dieser Art gehen durch die Gerade $e_\varkappa$ von $\varkappa$.

Als Grenzfall sind jene Überebenen Λ zu betrachten, für welche die Spuren in eine durch O gehende Gerade $l_1 = l_3$ fallen und die Ordnerbüschel in Deckung sind (Fig. 14*a*).

Die ∞^1 Überebenen dieser Art gehen durch die Koinzidenzebene $\varkappa$.

Punkte P, für welche die Charakteristik $q = +1$ ist. Die Bilder P', P''' liegen da sym-

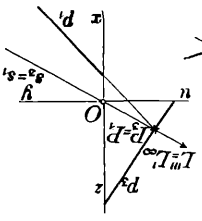

Fig. 15.

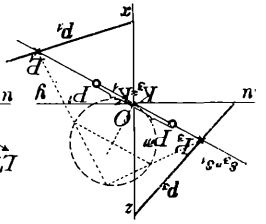

Fig. 15*a*.

metrisch zu O. Die Ordnerreihen $s_1 = s_3$ haben hier vereinigte Doppelpunkte $O = K_1 = K_3$; der Hilfskreis hat $OP' = OP'''$ als Radius (Fig. 15).

Für solche Punkte ist (p. 642)

$$x - z = 0 \text{ und } y - u = 0.$$

Die ∞^2 Punkte dieser Art liegen auf der Symmetrieebene σ.

Als Grenzfall sind jene Punkte L zu betrachten, für welche L'_∞ und L'''_∞ auf d_∞ zusammenfallen und die Ordnerreihen s_1, s_3 auf $O L'_\infty$ in Deckung sind (Fig. 15*a*).

Die ∞^1 Punkte dieser Art liegen auf der Koinzidenzgeraden $k = e_\sigma$.

2. Überebenen K, für welche die Spuren in eine Gerade $k_1 = k_3$ koinzidieren, so daß die Charakteristik $q = -1$ ist.

Die Ordnerbüschel sind ungleichlaufend kongruent und bilden eine symmetrische Involution (Fig. 16). Die Gerade $k_1 = k_3$ bildet mit der Parallelen durch O ein Strahlenpaar. Der eigentliche Doppelstrahl liegt in der Mitte zwischen O und $k_1 = k_3$ und ist die Abbildung $k' = k'''$ der Schnittgeraden k von K und $\varkappa$. Jedes Punktpaar P', P''' bestimmt hier eine zentrische Symmetrie, deren Zentrum $K' = K'''$ auf $k' = k'''$ liegt. Eine solche zentrische Symmetrie ist aber die Abbildung einer der ∞^1 in der Überebene K liegenden Ebenen, welche zur Symmetrieebene σ ganz parallel sind.

Die ∞^2 Überebenen K gehen durch die uneigentliche Gerade e_σ von σ (p. 642).

Als Grenzfall sind jene Überebenen Λ zu betrachten, für welche die Spuren in eine durch O gehende Gerade $l_1 = l_3$ fallen und die Ordnerbüschel eine symmetrische Involution mit $l_1 = l_3$ als Doppelstrahl bilden (Fig. 16*a*).

Die ∞^1 Überebenen dieser Art gehen durch die Symmetrieebene σ.

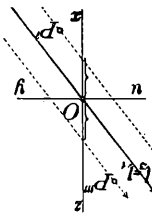

Fig. 16.

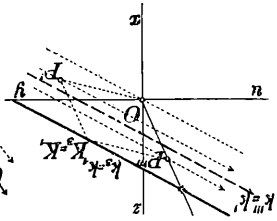

Fig. 16*a*.

Punkte K, für welche die Bilder in einen Punkt $K' = K'''$ koinzidieren, so daß die Charakteristik $q = -1$ ist.

Die Ordnerreihen bilden eine ungleichlaufende Punktinvolution, welche $K' = K'''$ als Zentralpunkt hat (Fig. 17). Der Hilfskreis hat diesen Punkt als Mittelpunkt und geht durch O. Der andere Schnittpunkt mit $s_1 = s_3$ ist die Doppelspur $K_1 = K_3$ der Verbindungsebene von K mit $k = e_\sigma$.

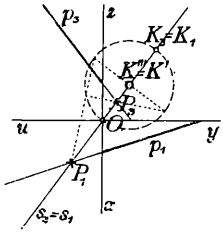

Fig. 17.

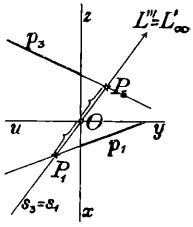

Fig. 17*a*.

Die ∞^2 Punkte K liegen auf der Koinzidenzebene $\varkappa$ (p. 642).

Als Grenzfall sind jene Punkte L zu betrachten, für welche L'_∞ und L'''_∞ auf d_∞ zusammenfallen und die Ordnerreihen eine symmetrische Involution auf $s_1 = s_3$ mit O als Doppelpunkt bilden (Fig. 17*a*).

Die ∞^1 Punkte dieser Art liegen auf der uneigentlichen Geraden $e_\varkappa$ von $\varkappa$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: 137_2a

Autor(en)/Author(s): Schmid Theodor

Artikel/Article: Über die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes. 621-645